www.wordlyknowledge.uz Volume: 3, Issue: 2, 2024

e ISSN : 3030-332X IMPACT FACTOR (Research bib) – 7,293

IKKINCHI TARTIBLI TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALANING UMUMLASHGAN VA KUCHSIZ YECHIMLARI

Muqumov A.H
asqarmuqumov@gmail.com
Iqtisodiyot va pedagogika universiteti

Annotatsiya: Ushbu maqolada differensial operatorlarning kasr tartibli darajalarining xossalaridan foydalanilgan holda giperbolik tenglamalar uchun chegaraviy masalaning umumlashgan va kuchsiz yechimlari o'rganilgan.

Kalit so'zlar: Elliptik differensial operator, umumlashgan yechim, kuchsiz yechim, pozitiv operator, yarim gruppa.

Ushbu ishda quyidagi

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Hu(t), \quad 0 \quad t \quad T \tag{1}$$

differensial tenglama uchun chegaraviy masala o'rganiladi. Bunda $H(x,D)-$ ikkinchi tartibli elliptik differensial operator bo'lib, bu operator

$$H(x,D) = -\Delta + q(x) \tag{2}$$

ko'rinishda. (2) operatordagi $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ va $q(x)$ haqiqiy o'zgaruvchili va haqiqiy qiymatli funksiya bo'lib, quyidagi munosabatni qanoatlantiradi:

$$\left|D^{\alpha} q(x)\right| \quad \frac{C}{|x|^{1+|\alpha|+\tau}}, \quad 0 \quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \quad n, \; 0 < \tau < 1. \tag{3}$$

1-Ta'rif. $u(t)$ funksiya (1) tenglamaning kuchsiz yechimi deyiladi, agarda:
1) $u(t)$ funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilasi $[0,T]$ da uzluksiz bo'lib, ikkinchi tartibli hosilasi $(0,T)$ da uzluksiz bo'lsa; 2) $0 < t < T$ bo'lganda $u(t)$ funksiyaning qiymati $D(H)$ ga tegishli bo'lib, $H^{1/2}u(t)$ funksiya $0 \quad t \quad T$ da uzluksiz bo'lsa; 3) $u(t)$ funksiya $(0,T)$ da (1) tenglamaning shartini qanoatlantirsa.

2-Ta'rif. $u(t)$ funksiya (1) tenglamaning umumlashgan yechimi deyiladi, agarda: 1) $u(t)$ funksiya $[0,T]$ da uzluksiz, ikkinchi tartibli hosilasi $(0,T)$ da uzluksiz bo'lib, $H^{-1/2}u(t)$ funksiyaning birinchi tartibli hosilasi $[0,T]$ da uzluksiz bo'lsa; 2) $0 < t < T$ bo'lganda $u(t)$ funksiyaning qiymati $D(H)$ ga tegishli bo'lsa; 3) $u(t)$ funksiya $(0,T)$ da (1) tenglamaning shartini qanoatlantirsa.

Agar qaralayotgan operator pozitiv operator bo'lsa, unda operatorning kasr tartibli darajasi quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$H^{\alpha}u = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \int_0 t^{\alpha-1} H\left(H + tI\right)^{-1} u\, dt, \; u \quad D\left(H\right), \; 0 < \operatorname{Re}\alpha < 1 \tag{4}$$

www.wordlyknowledge.uz Volume: 3, Issue: 2, 2024

e ISSN : 3030-332X IMPACT FACTOR (Research bib) – 7,293

4-Ta’rif. Chiziqli chegaralangan operatorlar oilasi $V(t)$ t parametrga $(0<t<+\ \ )$ nisbatan yarim gruppa tashkil qiladi deyiladi, agarda quyidagi munosabat o’rinli bo’lsa:

$$V(t_1+t_2)=V(t_1)V(t_2) \quad (0<t_1,\ t_2< \quad)$$

5-Ta’rif. Agar $V(t)$ yarim gruppa $t>0$ bo’lganda tekis uzluksiz bo’lib, ixtiyoriy $x \quad E$ element uchun $\lim\limits_{t\to+0} V(t)x=x$ bo’lsa, unda $V(t)$ yarim gruppa C_0 sinfga tegishli deyiladi.

Teorema. (1) tenglamaning barcha umumlashgan yechimi

$$u(t)=V(t)z_0+V(T-t)W_T,\ z_0, W_T \quad D(H^{\frac{1}{2}})$$

ko’rinishda bo’ladi va aksincha. (1) tenglamaning (4) ko’rinishidagi umumlashgan yechimi kuchsiz yechim bo’lishi uchun $z_0, W_T \quad D(H^{\frac{1}{2}})$ bo’lishi zarur va yetarli. $0<t<T$ bo’lganda (1) tenglamaning umumlashgan yechimi $t-$o’zgaruvchiga nisbatan analitik funksiya bo’ladi.

Endi esa keltirilgan ta’riflardan foydalangan holda teoremani isbotlaymiz.

Teoremaning isboti. Teoremani birinchi tasdiqini isbotlash uchun quyidagi yordamchi funksiyani kiritamiz:

$$v(t)=H^{-1/2}\frac{du}{dt} \tag{5}$$

(5) tenglikning har ikkala tomonini $t-$o’zgaruvchi bo’yicha differensiallab,

$$\frac{dv}{dt}=H^{-\frac{1}{2}}\frac{d^2u}{dt^2}=H^{-\frac{1}{2}}Hu=H^{\frac{1}{2}}u \tag{6}$$

bo’lishini topamiz. (5) va (6) tengliklardan foydalanib,

$$\frac{du}{dt}=H^{1/2}v$$

$$\frac{dv}{dt}=H^{1/2}u$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. $z=\frac{1}{2}(u-v),\ \ w=\frac{1}{2}(u+v)$ deb o’zgaruvchilarni almashtiramiz. Natijada

$$\frac{dz}{dt}=\frac{1}{2}\ \ \frac{du}{dt}-\frac{dv}{dt}\ \ =\frac{1}{2}\ \ H^{\frac{1}{2}}v-H^{\frac{1}{2}}u\ \ =-\frac{1}{2}H^{\frac{1}{2}}(u-v)=-H^{\frac{1}{2}}z$$

$$\frac{dw}{dt}=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u+v)=\frac{1}{2}\ \ \frac{du}{dt}+\frac{dv}{dt}\ \ =\frac{1}{2}\ \ H^{\frac{1}{2}}v+H^{\frac{1}{2}}u\ \ =H^{\frac{1}{2}}W$$

bo’lishini topamiz. Shunday qilib

www.wordlyknowledge.uz Volume: 3, Issue: 2, 2024

e ISSN : 3030-332X IMPACT FACTOR (Research bib) – 7,293

$$\frac{dz}{dt} = -H^{\frac{1}{2}}z; \qquad \frac{dw}{dt} = H^{\frac{1}{2}}w \tag{7}$$

Isbotlangan 2.1-teoremaga ko'ra, $H^{\frac{1}{2}}$ −operator kuchli uzluksiz chegaralangan $V(t)$ yarim gruppani tashkil qiladi. Shuningdek, bu $V(t)$ kuchli uzluksiz yarim gruppa C_0 −shartni qanoatlantiruvchi analitik yarim gruppa ham bo'ladi. Shuning uchun (7) tenglamalar uchun qo'yilgan Koshi masalasi korrektdir.

Shunga ko'ra,

$$z(t) = V(t)z_0 \ \text{va} \ \ w(t) = V(T-t)w_T \tag{8}$$

bo'lishini topamiz. $z(t)$ va $w(t)$ funksiyalar (1) tenglamaning yechimi bo'lishi uchun bu funksiyalar ikkinchi tartibli differensiali uzluksiz hamda $z_0, W_T \quad D(H^{\frac{1}{2}})$ bo'lishi kerak. Shuning bilan birgalikda (8) tenglamaning $0 < t < T$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi ixtiyoriy z_0 va w_T da cheksiz differensiallanuvchi funksiya bo'ladi.

Agarda $z_0, W_T \quad D(H^{\frac{1}{2}})$ bo'lsa, unda (2.4) ko'rinishda aniqlangan funksiya (1) tenglamaning kuchsiz yechimi bo'ladi.

Haqiqatan ham

$$H^{1/2}u(t) = V(t)H^{1/2}z_0 + V(T-t)H^{1/2}w_T,$$

$$\frac{du}{dt} = -V(t)H^{1/2}z_0 + V(T-t)H^{1/2}w_T \quad (0 \quad t \quad T)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = HV(t)z_0 + HV(T-t)w_T = Hu \quad (0 < t < T).$$

$H^{1/2}u(t)$ va $\frac{du}{dt}$ funksiyalarning [0,T] segmentda uzluksizligidan hamda $0 < t < T$ bo'lganda $\frac{d^2u}{dt^2}$ funksiyaning uzluksizligidan $V(t)$ − ning yarim gruppa bo'lishi kelib chiqadi.

Xuddi shuningdek, ixtiyoriy $z_0, W_T \quad W_p^2(R^n)$ elementlar uchun (7) formula bilan aniqlangan funksiyaning ham (1) tenglamaning umumlashgan yechim bo'lishi tekshiriladi.

Faraz qilaylik, $u(t)$ −funksiya (1) tenglamaning umumlashgan yechimi bo'lsin. U holda

$$v(t) = \frac{d}{dt}\left(H^{-1/2}u\right)$$

funksiya [0,T] segmentda uzluksiz hamda $0 < t < T$ bo'lganda (5) va (6) tenglamalarning shartini qanoatlantiradi. Bu esa $z(t)$ hamda $w(t)$ funksiyalarning (7) tenglamalar uchun qo'yilgan to'g'ri va teskari Koshi masalalarining yechimlari bo'lishini anglatadi. Shunga ko'ra, (7) tenglamalar uchun to'g'ri va teskari qo'yilgan Koshi masalalarining yechimini (8) formula orqali aniqlanadi, bunda

www.wordlyknowledge.uz Volume: 3, Issue: 2, 2024

e ISSN : 3030-332X IMPACT FACTOR (Research bib) – 7,293

$$z_0 = z(0) = \frac{1}{2}\ \ u(0) - \left(H^{-1/2}u\right)\ (0)\ \ ,$$

$$w_T = z(0) = \frac{1}{2}\ \ u(T) + \left(H^{-1/2}u\right)\ (T)\ \ .$$

Bordi-yu $u(t)$ funksiya (1) tenglamaning kuchsiz yechimi bo'lsa, unda

$$z_0 = \frac{1}{2}\left(u(0) - H^{-1/2}u\ (0)\right)\quad D(H^{1/2}),$$

$$w_T = \frac{1}{2}\left(u(T) + H^{-1/2}u\ (T)\right)\quad D(H^{1/2}).$$

Teorema isbotlandi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Ильин В. А. Ядра дробного порядка// Мат. сб. 1957. Т.41. № 4. С. 459-480.
2. Алимов Ш. А. Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций // Дифференциальные уравнения. -1972. Т. 8, № 9. -С. 1609-1626.
3. Красносельский М. А., Пустылник Е. И. Использование дробных степеней операторов при изучении рядов Фурье по собственным функциям дифференциальных операторов // ДАН. 1958. Т.122. № 6. С. 459-480.
4. Халмухамедов А.Р. Об отрицательных степенях сингулярного оператора Шредингера и сходимость спектральных разложений // Мат. заметки. - 1996. - №59(3). -С. 428–436 .
5. Костин В.А., Небольсина М.Н. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка// ДАН. 2009. Т.428. № 1. С. 20-22.
6. Muqumov A. H. IKKINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN QO'YILGAN CHEGARAVIY MASALANING KORREKT YECHILISHI //World scientific research journal. – 2023. – Т. 22. – №. 2. – С. 77-80.
7. Д.К.Салаев Х.Х.Имомназаров, А.Э.Холмуродов, А.Х.Мукумов Международная научно-практическая конференция «Рахматулинские чтения» 2023. Стр 61
8. Мукимов А.Х. Имомназаров Х.Х. Одномерная обратная задача определения источника из системы хопфа 2022 QarDU xabarlari Том 3 1 Стр 14