WORLDLY KNOWLEDGE
INTERNATIONAL JOURNAL OF SCIENTIFIC RESEARCHERS
ISSN : 3030-332X IMPACT FACTOR (Research bib) – 7,293

Kabulova M.Sh.

Qońırat rayonı 1-sanlı kásip-óner mektebi matematika páni oqıtıwshısı

KOMPLEKS ÓZGERIWSHILI FUNKCIYALARDIŃ DIFFERENCIALLANIWSHI BOLIWI HAQQINDA

Annotaciya: Bul maqalada ^{n} keńislikdegi kompleks ózgeriwshili funkciyalardıń differenciallanıwshı bolıwı hám olardıń tuwındıların esaplawda haqıyqıy ózgeriwshili funkciyalar ushın orınlı qaǵıyda hám formulalardan paydalanıw múmkinligi haqqında sóz etilgen.

Gilt sózler: Kompleks ózgeriwshi, differencial, differenciallanıwshı,arttırma, Koshi-Riman shártleri, Koshi integralı, Koshi integral formulası.

Kompleks ózgeriwshili funkciyalardıń tuwındıların esaplawda haqıyqıy ózgeriwshili funkciyalar ushın orınlı qaǵıyda hám formulalardan paydalanıw múmkin. Biraq kompleks ózgeriwshili funkciyalardıń tuwındıǵa iye bolıw shárti qosımsha shártler talap etedi.

Teorema[1]. $f(z)$ funkciyanıń z_0 noqatta $f\ (z_0)$ tuwındıǵa iye bolıwı ushın

1) $f(z)$ tiń z_0 noqatta haqıyqıy analiz mánisinde (R^2mánisinde) differenciallanıwshı bolıwı hám

2) $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (1)$$

teńlikleriniń orınlanıwı zárúr hám jetkilikli.

Dálil. (Zárúrligi). $f(z)$ funkciya z_0 noqatta $f'(z_0)$ tuwındıǵa iye bolsın. Tuwındınıń ańıqlamasına kóre

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}=f'(z_0),$$

yaǵnıy

$$\Delta f(z_0)=f'(z_0)\ \ \Delta z+\alpha\Delta z \qquad (2)$$

boladı. Bunda

$$\Delta z=z-z_0=(x+iy)-(x_0+iy_0)=(x-x_0)+i(y-y_0)=\Delta x+i\Delta y,$$
$$\Delta f(z_0)=f(z)-f(z_0)=\left[u(x,y)+iv(x,y)\right]-\left[u(x_0,y_0)+iv(x_0,y_0)\right]=,$$
$$=\left[u(x,y)-u(x_0,y_0)\right]+i\left[v(x,y)-v(x_0,y_0)\right]=\Delta u+i\Delta v$$

bolıp, α bolsa Δx hám Δy lerge baylanıslı hám olar nolge umtılǵanda α da nolge umtıladı. Meyli $f'(z_0)$ hám α nı

$$f'(z_0)=a+ib,\ \alpha=\alpha_1+i\alpha_2\left(\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\alpha_1=\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\alpha_2=0\right)$$

dep alıp, (2) teńlikti tómendegishe jazamız:

Bul teńliktegi haqıyqıy hámde jorımal bóleklerin teńlestirip

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \alpha_1 \Delta x - \alpha_2 \Delta y ,$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \alpha_2 \Delta x + \alpha_1 \Delta y \qquad (3)$$

teńliklerge iye bolamız. Demek, $u(x,y)$ hám $v(x,y)$ funkciyalar (x_0, y_0) noqatta differenciallanıwshı. Onda $f(z)$ funkciya z_0 noqatta R^2 mánisinde differenciallanıwshı boladı.

Bizge belgili, $f(z)$ funksiya z_0 noqatta $f'(z_0)$ tuwındıǵa iye bolsa, onda $\Delta z \to 0$ hám $\Delta z = \Delta x \to 0 \ (\Delta y = 0)$, $\Delta z = \Delta y \to 0 \ (\Delta x = 0)$ bolǵanda da

$$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}$$

qatnastıń limiti hámme waqıt $f'(z_0)$ ge teń boladı. (3) teńlikler $\Delta z = \Delta x \ (\Delta y = 0)$ bolǵanda

$$\Delta u = a\Delta x + \alpha_1 \Delta x ,$$

$$\Delta v = b\Delta x + \alpha_2 \Delta x . \qquad (4)$$

$\Delta z = \Delta y \ (\Delta y = 0)$ bolǵanda

$$\Delta u = -b\Delta y - \alpha_2 \Delta y$$

$$\Delta v = a\Delta y + \alpha_1 \Delta y \qquad (5)$$

teńliklerge keledi. (4) qatnaslardan $\frac{\partial u}{\partial x} = a$, $\frac{\partial v}{\partial x} = b$, (5) qatnaslardan bolsa $\frac{\partial u}{\partial x} = -b$, $\frac{\partial v}{\partial x} = a$ bolıwı kelip shıǵadı. Demek

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} .$$

(Jeterliligi). Meyli $f(z)$ funkciya z_0 noqatta R^2 mánisinde differenciallanıwshı bolıp, teoremada keltirilgen ekinshi shárt orınlansın. $u(x,y)$ hám $v(x,y)$ funkciyalar (x_0, y_0) noqatta differenciallanıwshı bolǵanı ushın

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y ,$$

$$\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_2 \Delta y$$

boladı. Bul jerde $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ da $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ lerdiń hár biri 0 ge umtıladı. Onda

$$\Delta f(z_0) = \Delta u + i\Delta v = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y + i \ \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \beta_1 \Delta x + \beta_1 \Delta y$$

boladı. Teoremanıń ekinshi shártinen paydalanıp tómendegini tabamız:

$$\Delta f(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)-i\frac{\partial u}{\partial y}(\Delta x+i\Delta y)+(\alpha_1+i\beta_1)\Delta x+(\alpha_2+i\beta_2)\Delta y=$$

$$=\ \frac{\Delta u}{\Delta x}-i\frac{\partial u}{\partial y}\ \ \Delta z+\ \ (\alpha_1+i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z}+(\alpha_2+i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\ \ \Delta z$$

Bul teńlikten bolsa

$$\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial x}+(\alpha_1+i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z}+(\alpha_2+i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z} \tag{6}$$

bolıwı kelip shıǵadı. Keyingi teńliktegi

$$(\alpha_1+i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z}+(\alpha_2+i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}$$

ańlatpa ushın

$$\left|(\alpha_1+i\beta_1)\frac{\Delta x}{\Delta z}+(\alpha_2+i\beta_2)\frac{\Delta y}{\Delta z}\right|\quad |\alpha_1+i\beta_1|\ \left|\frac{\Delta x}{\Delta z}\right|+|\alpha_2+i\beta_2|\ \left|\frac{\Delta y}{\Delta z}\right|\quad |\alpha_1+i\beta_1|+|\alpha_2+i\beta_2|$$

$$|\alpha_1|+|\beta_1|+|\alpha_2|+|\beta_2|<\varepsilon$$

boladı, sebebi $\Delta z\to 0$ de $\alpha_1\to 0$, $\beta_1\to 0$, $\alpha_2\to 0$, $\beta_2\to 0$. Usılardı itibarǵa alıp, $\Delta z\to 0$ de (6) teńlikte limitke ótip

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

bolıwın tabamız. Demek, $f(z)$ funkciya z_0 noqatta $f'(z_0)$ tuwındıǵa iye hám

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

boladı. Teorema dálillendi.

Teoremada keltirilgen (1) shártler Koshi-Riman shártleri delinedi. Joqarıda keltirilgen teorema $f(z)$ funkciya tuwındıǵa iye ekenligin dálillep qoymastan, onı esaplaw jolın da kórsetedi.

$$f'(z_0)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial v}{\partial x}$$

Meyli $f(z)$ funkciya $z_0=x_0+iy_0$ D $\mathrm{D}\subset\mathrm{C}$ noqatta $\mathbb{R}^2$ mánisinde differenciallanıwshı bolsın. Onda

$$du(x_{0,}y_0)+idv(x_0,y_0)$$

ańlatpa $f(z)$ funkciyanıń z_0 noqattaǵı differencialı delinedi hám $df(z_0)$ arqalı belgilenedi:

$$df(z_0)=du(x_0,y_0)+idv(x_0,y_0)\,.$$

Bizge belgili,

WORLDLY KNOWLEDGE
INTERNATIONAL JOURNAL OF SCIENTIFIC RESEARCHERS
ISSN : 3030-332X IMPACT FACTOR (Research bib) – 7,293

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy,\ dv = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy.$$

Usını itibarǵa alsaq,

$$df = \left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$ Demek,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy. \qquad (7)$$

Eger $z = x + iy$, $\overline{z} = x - iy$ dep alsaq, onda $dz = dx + idv$, $d\overline{z} = dx - idy$. Bul teńliklerden

$$dx = \frac{1}{2}\left(dz + d\overline{z}\right),\ dy = \frac{1}{2i}\left(dz - d\overline{z}\right) \qquad (8)$$

kelip shıǵadı. (7) hám (8) teńliklerden bolsa

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{1}{2}\left(dz + d\overline{z}\right) + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{1}{2i}\left(dz - d\overline{z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\overline{z}$$ ekenligi kelip shıǵadı. Eger

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (9)$$

kórinisinde belgilesek, onda $f(z)$ funkciyanıń differencialın

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}dz + \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}d\overline{z}$$

kórinisine alıp kelemiz.

Meyli, $u(x,y)$ hám $v(x,y)$ funkciyaları ushın qálegen noqatta Koshi-Riman shártleri orınlı bolsın. Onda (9) teńlikte

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

boladı. Kerisinshe, $f(z)$ funkciya ushın qálegen noqatta

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$$

bolsın. Onda (9) teńlikke kóre usı noqatta

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

boladı, yaǵnıy Koshi-Riman shártleri orınlanadı. Demek, qálegen noqatta Koshi-Riman shártleriniń orınlanıwı usı noqatta

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

teńligine ekvivalent eken.

Ádebiyatlar:

1. Б.В.Шабат Введение в комплексный анализ, Часть II. –М.: Наука, 1976.

2.И.И.Привалов Введение в теорию функций комплексного переменного. Санкт-Петербург, Москва,