

Muqumov Asqar

Iqtisodiyot va pedagogika universiteti, katta o'qituvchi

asqarmuqumov@gmail.com

[Orcid: 0009-002-0500-5153](https://orcid.org/0009-002-0500-5153)

UDK 510.57

CHEGARAVIY MASALANING UMUMLASHGAN VA KUCHSIZ YECHIMLARI

Annotatsiya: Ushbu maqolada differensial operatorlarning kasr tartibli darajalarining xossalariidan foydalanilgan holda giperbolik tenglamalar uchun chegaraviy masalaning umumlashgan va kuchsiz yechimlari o'rganilgan.

Kalit so'zlar: Elliptik differensial operator, umumlashgan yechim, kuchsiz yechim, pozitiv operator, yarim grupp.

Ushbu ishda quyidagi

$$\frac{d^2u}{dt^2} = Hu(t), \quad 0 < t < T \quad (1)$$

differensial tenglama uchun chegaraviy masala o'rganiladi. Bunda $H(x, D)$ – ikkinchi tartibli elliptik differensial operator bo'lib, bu operator

$$H(x, D) = -\Delta + q(x) \quad (2)$$

ko'rinishda. (2) operatoridagi $D = \prod_{i=1}^n \sqrt{x_i^2}$ va $q(x)$ haqiqiy o'zgaruvchili va haqiqiy qiymatli funksiya bo'lib, quyidagi munosabatni qanoatlantiradi:

$$|D^\alpha q(x)| \leq \frac{C}{|x|^{1+|\alpha|+\tau}}, \quad 0 < |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < n, \quad 0 < \tau < 1. \quad (3)$$

1-Ta'rif. $u(t)$ funksiya (1) tenglamaning kuchsiz yechimi deyiladi, agarda:

1) $u(t)$ funksiyaning birinchi tartibli xususiy hosilasi $[0, T]$ da uzluksiz bo'lib, ikkinchi tartibli hosilasi $(0, T)$ da uzluksiz bo'lsa; 2) $0 < t < T$ bo'lganda $u(t)$ funksiyaning qiymati $D(H)$ ga tegishli bo'lib, $H^{1/2}u(t)$ funksiya $0 < t < T$ da uzluksiz bo'lsa; 3) $u(t)$ funksiya $(0, T)$ da (1) tenglamaning shartini qanoatlantirsa.

2-Ta'rif. $u(t)$ funksiya (1) tenglamaning umumlashgan yechimi deyiladi, agarda: 1) $u(t)$ funksiya $[0, T]$ da uzluksiz, ikkinchi tartibli hosilasi $(0, T)$ da uzluksiz bo'lib, $H^{-1/2}u(t)$ funksiyaning birinchi tartibli hosilasi $[0, T]$ da uzluksiz bo'lsa; 2) $0 < t < T$ bo'lganda $u(t)$ funksiyaning qiymati $D(H)$ ga tegishli bo'lsa; 3) $u(t)$ funksiya $(0, T)$ da (1) tenglamaning shartini qanoatlantirsa.

Agar qaralayotgan operator pozitiv operator bo'lsa, unda operatorning kasr tartibli darajasi quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$H^\alpha u = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_0^t t^{\alpha-1} H(H+tI)^{-1} u dt, \quad u \in D(H), \quad 0 < \text{Re } \alpha < 1 \quad (4)$$

4-Ta'rif. Chiziqli chegaralangan operatorlar oilasi $V(t)$ t parametrga $(0 < t < +\infty)$ nisbatan yarim grupp tashkil qiladi deyiladi, agarda quyidagi munosabat o'rinli bo'lsa:

$$V(t_1 + t_2) = V(t_1)V(t_2) \quad (0 < t_1, t_2 < +\infty)$$

5-Ta'rif. Agar $V(t)$ yarim gruppaga $t > 0$ bo'lganda tekis uzluksiz bo'lib, ixtiyoriy $x \in E$ element uchun $\lim_{t \rightarrow +0} V(t)x = x$ bo'lsa, unda $V(t)$ yarim gruppaga C_0 sinfga tegishli deyiladi.

Teorema. (1) tenglamaning barcha umumlashgan yechimi

$$u(t) = V(t)z_0 + V(T-t)W_T, \quad z_0, W_T \in D(H^{\frac{1}{2}})$$

ko'rinishda bo'ladi va aksincha. (1) tenglamaning (4) ko'rinishidagi umumlashgan yechimi kuchsiz yechim bo'lishi uchun $z_0, W_T \in D(H^{\frac{1}{2}})$ bo'lishi zarur va yetarli. $0 < t < T$ bo'lganda (1) tenglamaning umumlashgan yechimi t – o'zgaruvchiga nisbatan analitik funksiya bo'ladi.

Endi esa keltirilgan ta'riflardan foydalangan holda teoremani isbotlaymiz.

Teoremaning isboti. Teoremani birinchi tasdiqini isbotlash uchun quyidagi yordamchi funksiyani kiritamiz:

$$v(t) = H^{-1/2} \frac{du}{dt} \tag{5}$$

(5) tenglikning har ikkala tomonini t – o'zgaruvchi bo'yicha differensiallab,

$$\frac{dv}{dt} = H^{-\frac{1}{2}} \frac{d^2u}{dt^2} = H^{-\frac{1}{2}} H u = H^{\frac{1}{2}} u \tag{6}$$

bo'lishini topamiz. (5) va (6) tengliklardan foydalanib,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= H^{1/2} v \\ \frac{dv}{dt} &= H^{1/2} u \end{aligned}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. $z = \frac{1}{2}(u - v)$, $w = \frac{1}{2}(u + v)$ deb o'zgaruvchilarni almashtiramiz. Natijada

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dt} - \frac{dv}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left(H^{\frac{1}{2}} v - H^{\frac{1}{2}} u \right) = -\frac{1}{2} H^{\frac{1}{2}} (u - v) = -H^{\frac{1}{2}} z$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u + v) = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt} \right) = \frac{1}{2} \left(H^{\frac{1}{2}} v + H^{\frac{1}{2}} u \right) = H^{\frac{1}{2}} w$$

bo'lishini topamiz. Shunday qilib

$$\frac{dz}{dt} = -H^{\frac{1}{2}} z; \quad \frac{dw}{dt} = H^{\frac{1}{2}} w \tag{7}$$

Isbotlangan 2.1-teoremaga ko'ra, $H^{\frac{1}{2}}$ – operator kuchli uzluksiz chegaralangan $V(t)$ yarim gruppani tashkil qiladi. Shuningdek, bu $V(t)$ kuchli uzluksiz yarim gruppaga C_0 – shartni qanoatlantiruvchi analitik yarim gruppaga ham bo'ladi. Shuning uchun (7) tenglamalar uchun qo'yilgan Koshi masalasi korrektdir.

Shunga ko'ra,

$$z(t) = V(t)z_0 \text{ va } w(t) = V(T-t)w_T \quad (8)$$

bo'lishini topamiz. $z(t)$ va $w(t)$ funksiyalar (1) tenglamaning yechimi bo'lishi uchun bu funksiyalar ikkinchi tartibli differensial uzluksiz hamda $z_0, w_T \in D(H^{1/2})$ bo'lishi kerak. Shuning bilan birgalikda (8) tenglamaning $0 < t < T$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi ixtiyoriy z_0 va w_T da cheksiz differensiallanuvchi funksiya bo'ladi.

Agarda $z_0, w_T \in D(H^{1/2})$ bo'lsa, unda (2.4) ko'rinishda aniqlangan funksiya (1) tenglamaning kuchsiz yechimi bo'ladi.

Haqiqatan ham

$$H^{1/2}u(t) = V(t)H^{1/2}z_0 + V(T-t)H^{1/2}w_T,$$

$$\frac{du}{dt} = -V(t)H^{1/2}z_0 + V(T-t)H^{1/2}w_T \quad (0 < t < T)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = HV(t)z_0 + HV(T-t)w_T = Hu \quad (0 < t < T).$$

$H^{1/2}u(t)$ va $\frac{du}{dt}$ funksiyalarning $[0, T]$ segmentda uzluksizligidan hamda $0 < t < T$ bo'lganda

$\frac{d^2u}{dt^2}$ funksiyaning uzluksizligidan $V(t)$ – ning yarim grupp bo'lishi kelib chiqadi.

Xuddi shuningdek, ixtiyoriy $z_0, w_T \in W_p^2(R^n)$ elementlar uchun (7) formula bilan aniqlangan funksiyaning ham (1) tenglamaning umumlashgan yechim bo'lishi tekshiriladi.

Faraz qilaylik, $u(t)$ – funksiya (1) tenglamaning umumlashgan yechimi bo'lsin. U holda

$$v(t) = \frac{d}{dt}(H^{-1/2}u)$$

funksiya $[0, T]$ segmentda uzluksiz hamda $0 < t < T$ bo'lganda (5) va (6) tenglamalarning shartini qanoatlantiradi. Bu esa $z(t)$ hamda $w(t)$ funksiyalarning (7) tenglamalar uchun qo'yilgan to'g'ri va teskari Koshi masalalarining yechimlari bo'lishini anglatadi. Shunga ko'ra, (7) tenglamalar uchun to'g'ri va teskari qo'yilgan Koshi masalalarining yechimini (8) formula orqali aniqlanadi, bunda

$$z_0 = z(0) = \frac{1}{2} u(0) - (H^{-1/2}u)(0) ,$$

$$w_T = z(0) = \frac{1}{2} u(T) + (H^{-1/2}u)(T) .$$

Bordi-yu $u(t)$ funksiya (1) tenglamaning kuchsiz yechimi bo'lsa, unda

$$z_0 = \frac{1}{2} (u(0) - H^{-1/2}u(0)) \in D(H^{1/2}),$$

$$w_T = \frac{1}{2} (u(T) + H^{-1/2}u(T)) \in D(H^{1/2}).$$

Teorema isbotlandi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Ильин В. А. Ядра дробного порядка// Мат. сб. 1957. Т.41. № 4. С. 459-480.
2. Алимов Ш. А. Дробные степени эллиптических операторов и изоморфизм классов дифференцируемых функций // Дифференциальные уравнения. -1972. Т. 8, № 9. -С. 1609-1626.
3. Красносельский М. А., Пустылник Е. И. Использование дробных степеней операторов при изучении рядов Фурье по собственным функциям дифференциальных операторов // ДАН. 1958. Т.122. № 6. С. 459-480.
4. Халмухамедов А.Р. Об отрицательных степенях сингулярного оператора Шредингера и сходимости спектральных разложений // Мат. заметки. - 1996. - №59(3). -С. 428–436 .
5. Костин В.А., Небольсина М.Н. О корректной разрешимости краевых задач для уравнения второго порядка// ДАН. 2009. Т.428. № 1. С. 20-22.
6. Muqumov A. H. IKKINCHI TARTIBLI DIFFERENSIAL TENGLAMA UCHUN QO'YILGAN CHEGARAVIY MASALANING KORREKT YECHILISHI //World scientific research journal. – 2023. – Т. 22. – №. 2. – С. 77-80.
7. Мукумов А. Х. О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА //Ta'limning zamonaviy transformatsiyasi. – 2024. – Т. 4. – №. 2. – С. 243-246.0
8. Muqumov A.H. BIR O 'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING FURE ALMASHTIRISHI VA XOSSALARI //Educational Research in Universal Sciences. – 2024. – Т. 3. – №. 4 SPECIAL. – С. 545-548.
9. Muqumov A. H. IKKINCHI TARTIBLI TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALANING UMUMLASHGAN VA KUCHSIZ YECHIMLARI //International journal of scientific researchers (IJSR) INDEXING. – 2023. – Т. 3. – №. 2.