

Ибодов Набижон Музаффарович

Ассистент кафедры "общетехнические науки" Азиатского международного университета
ibodovnab@yandex.ru.

UDK 539.2

ОБЩИЕ ФОРМУЛЫ КООРДИНАТ ЦЕНТРА ТЯЖЕСТИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Аннотация: В этой статье рассматривается влияние силы тяжести (силы тяжести) на каждый кусок твердого тела, направленный к центру Земли, центр параллельных сил и их состояния, а также состояния центра тяжести плоской формы. В этой статье плоская форма изучается при изучении положения центра тяжести плоской формы как однородного тонкого пилообразного тела. В этой статье снова перечислены следующие простые методы определения центра тяжести тел: метод симметрии, метод деления на части, метод отрицательной поверхности, метод интегрирования.

Ключевые слова: Твердое тело, центр тяжести, плоская форма, однородная тонкая пластина, радиус Земли, координаты центра тяжести, параллельные силы, однородное тело, объем для координат центра тяжести, поверхность для координат центра тяжести, метод симметрии, метод деления на части, метод отрицательной поверхности, метод интегрирования, поверхность сектора круга.

QATTIQ JISMNING OG‘IRLIK MARKAZI KOORDINATALARINING UMUMIY FORMULALARI

Annotatsiya: Ushbu maqolada qattiq jismning har bir bo‘lagiga yerning markaziga qarab yo‘nalgan tortish kuchi (og‘irlik kuchi) ta’siri, parallel kuchlarning markazi va ularning holatlari hamda tekis shakl og‘irlik markazining xolatlari qaralgan. Bu maqolada tekis shakl og‘irlik markazining xolatini o‘rganishda tekis shaklni bir jinsli yupqa plastinka shaklidagi jism sifatida qarab o‘rganilgan. Ushbu maqolada yana jisimlarning og‘irlik markazini aniqlashning quydagi sodda usullar orqali keltirib o‘tilgan: SIMMETRYA USULI, BO‘LAKLARGA BO‘LISH USULI, MANFIY YUZA USULI, Integrallash usuli.

Kalit so‘zlar: Qattiq jism, og‘irlik markazi, tekis shakl, bir jinsli yupqa plastinka, Yerning radiusi, og‘irlik markazining koordinatalari, parallel kuchlar, Bir jinsli jism, HAJM OG‘IRLIK MARKAZINING KOORDINATALARI UCHUN, YUZA OG‘IRLIK MARKAZINING KOORDINATALARI UCHUN, SIMMETRYA USULI, BO‘LAKLARGA BO‘LISH USULI, MANFIY YUZA USULI, Integrallash usuli, Doira sektori yuzasi.

GENERAL FORMULAS FOR THE COORDINATES OF THE CENTER OF GRAVITY OF A SOLID

Annotation: This article looks at the effect of gravity (force of gravity) on each branch of a solid towards the center of the Earth, the center of parallel forces and their states, and the positions of the center of gravity of a flat form. This article explores the flat form in the study of the state of the center of gravity by looking at the flat form as a uniformly thin pilastin-shaped object. This article again cites the determination of the center of gravity of objects through simpler methods below: symmetry method, fragmentation method, negative surface method, Integralization method.

Keywords: solid body, center of gravity, flat shape, homogeneous thin plate, Earth radius, center of gravity coordinates, parallel forces, homogeneous body, volume for the coordinates of the center of gravity, surface for the coordinates of the center of gravity, symmetry method, fragmentation method, negative surface method, integration method, Circle sector surface.

На каждый кусок твердого тела действует сила тяжести (сила тяжести), направленная к центру Земли. Это определяется степенями $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \dots, \overline{P_n}$. Поскольку размеры тела относительно радиуса Земли очень малы, эти силы можно рассматривать как параллельные силы. Центром этих параллельных сил в точке С будет центр тяжести тела (рис.1).

Если :

$$Z_c = \frac{F_1 Z_1 + F_2 Z_2 + \dots + F_n Z_n}{R} = \frac{\sum F_k Z_k}{R}$$

и

$$\vec{r}_c = X_c \cdot \vec{i} + Y_c \cdot \vec{j} + Z_c \cdot \vec{k} \quad \vec{r}_c = \frac{F_1 \vec{r}_1 + F_2 \vec{r}_2 + \dots + F_n \vec{r}_n}{R} = \frac{\sum F_k \vec{r}_k}{R} \quad k = \overline{1, n}$$

если вместо сил $\overline{F_k}$ в формулах взять силы $\overline{P_k}$, то найдутся координаты центра тяжести тела:

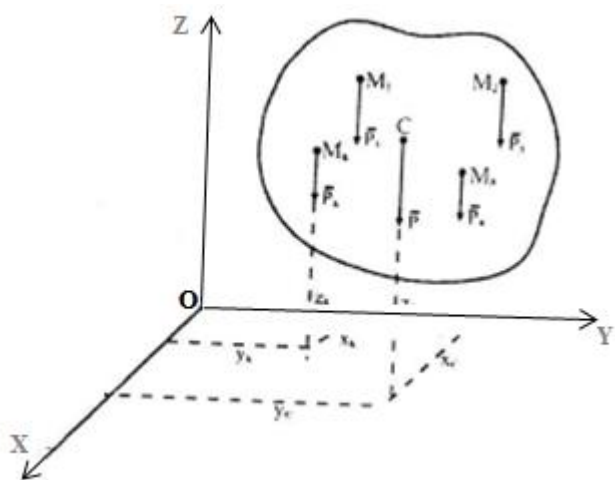


Рисунок 1.

$$\left. \begin{aligned} X_c &= \frac{1}{P} * \sum p_k x_k \\ Y_c &= \frac{1}{P} * \sum p_k y_k \\ Z_c &= \frac{1}{P} * \sum p_k z_k \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Где $P_k (k = 1, 2, \dots, n)$ - веса частиц тела, x_k, y_k, z_k - k-координаты точек, в которые помещены веса частиц, $P = \sum P_k$ - вес тела.

По Формуле (1) можно определить координаты центра тяжести любого твердого тела. Поэтому эти формулы называются общими формулами координат центра тяжести.

Определим центр тяжести однородного тела. Вес однородного тела определяется по формуле: $P = \gamma V$, где V – объем тела, γ – вес одной единицы объема. Вес каждого куса твердого тела пропорционален объему этого куска: $P_k = \gamma \cdot v_k$, где v_k – объем куска M_k тела. Подставляя эти значения P и P_k в формулы (88) – γ на рисунке, вычитая общий множитель из круглых скобок и сокращая его до γ в знаменателе:

$$X_c = \frac{1}{V} * \sum v_k X_k, Y_c = \frac{1}{V} * \sum v_k Y_k, Z_c = \frac{1}{V} * \sum v_k Z_k \quad (2)$$

формула исходит из. Центр тяжести однородного тела зависит только от геометрической формы тела и не зависит от значения γ . Точка C , координаты которой определяются формулами (2), называется центром тяжести объема.

Однородное тонкое пилообразное тело можно рассматривать как плоскую форму. Положение центра тяжести плоской формы определяется двумя координатами X_c и Y_c (рис.2). Вес плоской формы будет пропорционален ее поверхности.

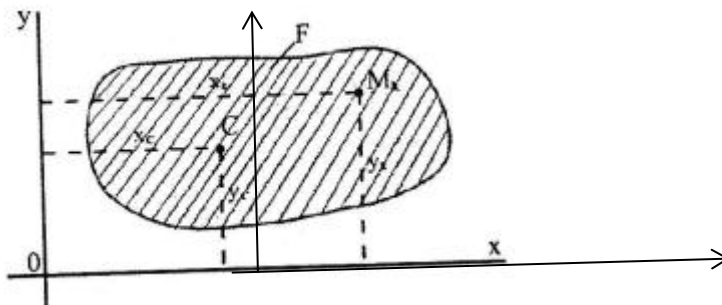


Рисунок 2

$P = \gamma F$, где F – поверхность плоской формы, γ – вес одной единицы поверхности. Разделим элементарную поверхность M_k на элементарные поверхности. Вес каждой элементарной поверхности M_k находится по формуле: $P_k = \gamma \cdot F_k$, где F_k – ее грань. Координаты центра тяжести элементарной поверхности обозначаются X_k, Y_k . Подставляем значения P и P_k в Формулу (1):

$$X_c = \frac{\sum \gamma F_k X_k}{\gamma \cdot F} = \frac{\gamma \cdot \sum F_k X_k}{\gamma \cdot F} = \frac{\sum F_k X_k}{F}$$

отсюда координаты центра тяжести плоской формы:

$$X_c = \frac{\sum F_k X_k}{F} \quad Y_c = \frac{\sum F_k Y_k}{F} \quad (3)$$

находится по формулам. Координатами называют центр тяжести поверхности точки s , определяемый по формулам (3). Величины $S_x = \sum F_k X_k$, $S_y = \sum F_k Y_k$ в Формуле (3) называются статическим моментом поверхности плоской фигуры относительно осей X и Y . Единицей измерения статического крутящего момента является M^3 . Следовательно, формулы (3) можно записать в следующем виде.

$$X_c = \frac{S_y}{F}; \quad Y_c = \frac{S_x}{F}. \quad (4)$$

Из Формулы (4) выводятся равенства $S_x = F \cdot Y_c$, $S_y = F \cdot X_c$.

Статический момент плоской грани фигуры относительно оси равен произведению расстояния между поверхностью фигуры и ее центром тяжести от этой оси. Если известны статический момент и поверхность плоской формы, то координаты центра тяжести плоской формы находят по формулам (4). Плоские поверхности формы будут иметь нулевой статический момент относительно осей, проходящих через центр тяжести формы, потому что в этом случае:

$$x_c = 0, \quad y_c = 0.$$

Пусть дана однородная линия AB длины L (рис. 3). Поверхность меридианного участка линии постоянна. Вес линии находится по следующей формуле: $P = \rho \cdot L$. В этом случае вес l -единицы длины и длины линии AB , равные l_k , разбиваются на элементарные куски M_k . Вес каждой частицы находится по следующей формуле:

$P_k = \rho l_k$. Координаты центра тяжести деталей определяются X_k , Y_k , Z_k . Значения P и P_k задаются формулами (1):

$$X_c = \frac{\sum l \cdot x}{pl} = \frac{p \cdot \sum l_k x_k}{pl}.$$

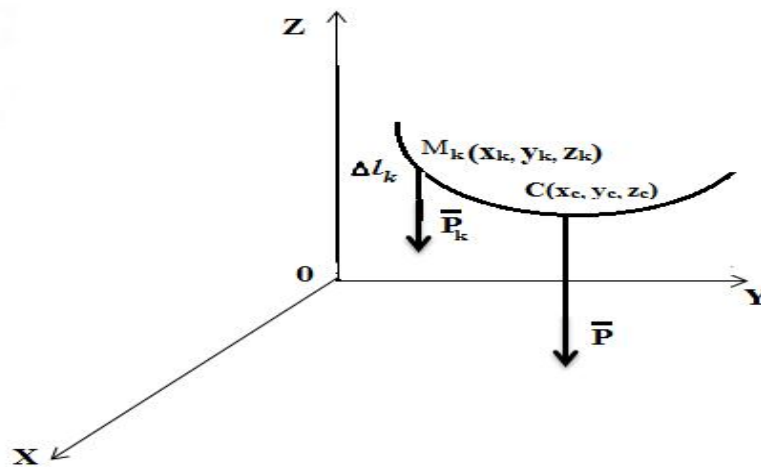


Рисунок 3.

$$\left. \begin{aligned} X_c &= \frac{1}{L} \cdot \sum l \cdot x \\ Y_c &= \frac{1}{L} \cdot \sum l \cdot y \\ Z_c &= \frac{1}{L} \cdot \sum l \cdot z \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Здесь L — длина всех линий, точка C , координаты которой определяются формулами (5), называется центром тяжести линии [1-2].

1) **МЕТОД СИММЕТРИИ. ТЕОРЕМА 1:** Если тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела лежит на этой оси симметрии. Дано тело, обладающее осью симметрии (рис. 3). Одна из осей координат, например ось Z, ориентирована вдоль оси симметрии. Две координаты центра тяжести тела определяются по формулам (6);

$$X_c = \frac{\sum v_x}{V}; \quad Y_c = \frac{\sum v_y}{V} \quad (6)$$

Из этого тела получают две точки M_R и M'_R , симметрично расположенные относительно оси Z. Равные друг другу элементарный объем V_k отделяется от своего окружения. M_R и M'_R лежат на одной прямой, перпендикулярной оси точек, и расстояния от этих точек до оси равны;

$$M_R N_R = N_R M_R.$$

Следовательно, координаты x_k и y_k этих точек равны друг другу, а их знаки противоположны. В этом случае он соответствует пузырю объема V_k , определяемому координатами x_k, y_k, z_k . Следовательно, $\sum V_k z_k = 0$ и $\sum V_k y_k = 0$ равны. $\sum V_k x_k = V_1 x_1 + V_2 x_2 + \dots + V_n x_n - V_1 x_1 + V_2 x_2 + \dots + V_n x_n = 0$, поэтому $x_c = 0$ и $y_c = 0$ центр тяжести тела лежит на Z ось и ее положение на этой оси определяется одной координатой:

$$Z_k = \frac{1}{V} \sum V_k z_k \quad (6')$$

Теорема 2: Если тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести тела лежит в этой плоскости симметрии (рис. 3). Чтобы доказать это, через плоскость симметрии проводят линию. Она направляет ось перпендикулярно этой плоскости. Две точки N_k и M_k , симметрично расположенные от тела к плоскости Оху, лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости Оху. Расстояния от этих точек до плоскости симметрии равны между собой, то есть $M_k N_k = N_k M_k$ (рис. 3), поэтому координаты Z_k этих точек равны между собой, а их знаки противоположны [3-4]:

$$\sum V_k z_k = V_1 z_1 + V_2 z_2 + \dots + V_n z_n - V_1 z_1 + V_2 z_2 + \dots + V_n z_n = 0$$

$$Z_c = \frac{1}{V} \sum V_k z_k \quad X_c = \frac{1}{V} \sum V_k x_k \quad Y_c = \frac{1}{V} \sum V_k y_k. \quad (7)$$

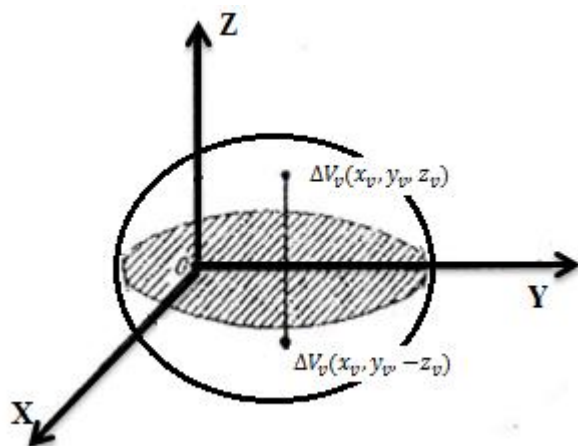


Рисунок 4

ЭТОТ РЕЗУЛЬТАТ ПОКАЗЫВАЕТ, ЧТО ЦЕНТР ТЯЖЕСТИ ТЕЛА ЛЕЖИТ В ЦЕНТРЕ СИММЕТРИИ. АНАЛОГИЧНО, ЕСЛИ ТЕЛО ИМЕЕТ ЦЕНТР СИММЕТРИИ, ДОКАЗАНО, ЧТО ОНО ЛЕЖИТ В ЦЕНТРЕ ТЯЖЕСТИ.

2. СПОСОБ ДЕЛЕНИЯ НА РОДНИКИ. Если есть возможность разделить тело на несколько частей, центры тяжести которых известны заранее, координаты центра тяжести тела определяются по формулам (7).

3. МЕТОД ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ. Этот метод является частным случаем метода секционирования. Этот метод используется для объектов с отверстиями. Сущность метода состоит в том, что тело рассматривается как целое тело без дырки и как имеющее дырку; поверхность отверстия условно принимается с отрицательным знаком. Для применения этого метода необходимо знать центр тяжести всего тела и части отверстия [5-6].

4. МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ. Если тело нельзя разделить на части с несколькими известными центрами тяжести, то сначала его разбивают на сколь угодно малые объемы Δv_k , и формула (7) для тела принимает следующий вид.

$$X_c = \frac{1}{V} \sum V_k x_k \text{ и т. д.}, \quad (8)$$

Здесь x_k, y_k, z_k - координаты точки внутри объема Δv_k . Если Δv_k в формулах (8) стремится к нулю и переходит к пределу, то получаем следующее:

Для координат объемного центра тяжести:

$$x_c = \frac{1}{V} \cdot \int x dV. \quad y_c = \frac{1}{V} \cdot \int y dV. \quad z_c = \frac{1}{V} \cdot \int z dV. \quad (9)$$

Для координат центра тяжести поверхности:

$$x_c = \frac{1}{F} \cdot \int x dF. \quad y_c = \frac{1}{F} \cdot \int y dF. \quad z_c = \frac{1}{F} \cdot \int z dF. \quad (10)$$

Для координат линейного центра тяжести:

$$x_c = \frac{1}{L} \cdot \int x dl. \quad y_c = \frac{1}{L} \cdot \int y dl. \quad z_c = \frac{1}{L} \cdot \int z dl. \quad (11)$$

Центр тяжести поверхности треугольника. Для определения центра тяжести поверхности произвольного треугольника ABD разделим поверхность треугольника отрезком прямой, параллельной стороне AB (рис. 5). Центр тяжести такого сечения лежит в его середине, т. е. в медиане DE. Следовательно, центр тяжести поверхности треугольника лежит в медиане. Аналогично, если разделить поверхность треугольника отрезком прямой, параллельной стороне AD, то центр тяжести этих участков прямой будет лежать на медиане BK.

Итак, центр тяжести поверхности треугольника лежит в точке пересечения трех его медиан. Из геометрии известно, что точка пересечения медиан лежит на расстоянии $\frac{1}{3}$ медианы от основания, т. е. $CE = \frac{1}{3}DE$.

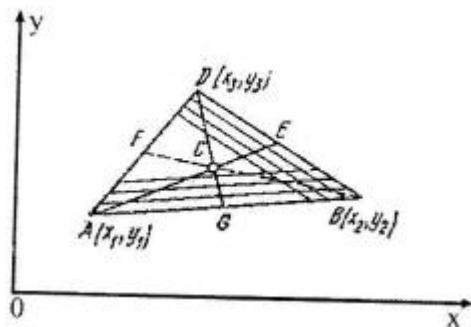


Рисунок 5

Если координаты концов треугольника $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $D(x_3, y_3)$ заданы, то координаты его центра тяжести $C(x_c, y_c)$ находятся из следующего формулы:

$$X_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_c = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad (12)$$

формулы (12) были выведены в аналитической геометрии.

Центр тяжести дуги окружности. Определим центр тяжести дуги окружности АВ радиусом R и углом 2α . Для этого ось Ox направлена вдоль оси симметрии дуги окружности (рис. 6). В этом случае центр тяжести дуги окружности лежит на этой оси. ($y_c = 0$).

Координату x_c находим по формуле (13). Для этого на дуге АВ выделяется элементарный отрезок, равный $dl = R d\gamma$.

Его положение определяется углом γ . Координата центра тяжести элементарного угла равна $X = R \cos \gamma$, подставляя значения x и $d\gamma$ в первую часть формулы (10), а интегрируя его по длине всей дуги:

В этом случае длина дуги $L-AB$ равна $L = R \cdot 2\alpha$. Следовательно, центр тяжести дуги окружности лежит на оси симметрии и находится на расстоянии от центра окружности. В этом случае угол α измеряется в радианах.

$$X_c = R \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (13)$$

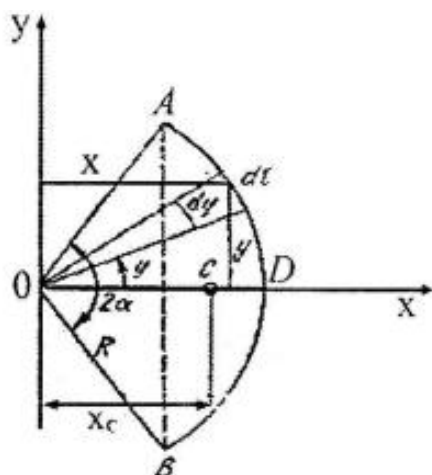


Рисунок 6

Если $2\alpha=\pi$, образуется полукруг (рис. 6).

Если представить это в формуле (10),

$$y_c = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot R = \frac{2}{3,14} \cdot R = 0,64R, \quad y_c = 0,64R$$

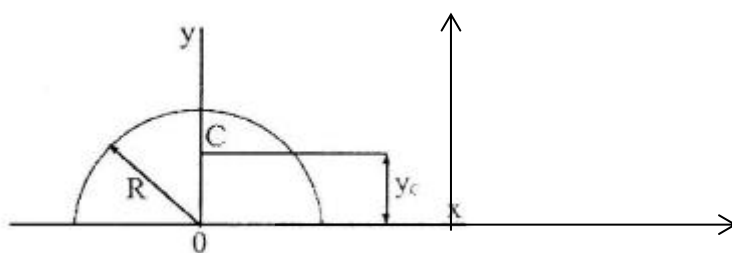


Рисунок 7

Координата центра тяжести полукруговой дуги находится по формуле (12).

3. Центр тяжести поверхности сектора круга. Для определения центра тяжести поверхности сектора круга радиусом R и центральным углом 2α ось x направляется вдоль оси симметрии. поверхность сектора (рис. 8).

Поверхность сектора считается составленной из нескольких элементарных секторов. Если высоту каждого элементарного сектора считать треугольной, то его центр тяжести находится на расстоянии $\frac{2}{3}R$ от нулевой точки. Центр тяжести кругового сектора OAB совпадает с центром тяжести дуги окружности AE радиуса $\frac{2}{3}R$ [7].

Согласно (13).

$$X_2 = \frac{2}{3}R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (14)$$

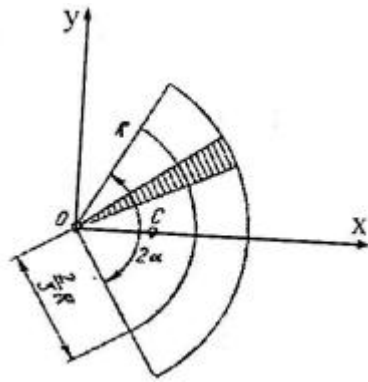


Рисунок 8

Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, образуется полукруг. Координата центра тяжести полукруга определяется по формуле (14).

$$X_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} \cdot R = \frac{4}{3\pi} \cdot R = \frac{4}{3 \cdot 3,14} \cdot R = 0,42R$$

$$X_c = 0,64R \quad (y_c = 0).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Р.Шохайдарова, Ш.Шозиотов, Ш.Зоиров, "Теоретическая механика", учебник, Ташкент, 1991.
2. Т.Р.Рашидов, Ш.Шозиотов, К.В.Мо Минов, "основы теоретической механики", учебник, Ташкент, 1990.
3. Juraev, F., Ibodov, N., Sharipova, D., Do'stova, S., & Avliyoqulov, M. (2024). Studying the technological process formation of mole drainage from a mole ripper. In *E3S Web of Conferences* (Vol. 486, p. 03013). EDP Sciences.
4. Н.С.Бибутов, М.Муродов, "Прикладная механика", Ташкент, "Узинкомцентр", 2002.
5. Ibodov, N., & Toyirov, M. (2023). COMPLETE INTEGRABLE VECTOR FIELD GEOMETRY. *Modern Science and Research*, 2(7), 484-486.
6. Ibodov, N. M., & Qobilov, K. H. (2022, September). EGRI CHIZIQ BILAN CHEGARALANGAN SOHANING YUZI EGRI CHIZIQLI INTEGRAL ORQALI IFODALASH. In *INTERNATIONAL CONFERENCES* (Vol. 1, No. 11, pp. 7-11).
7. Ibodov, N., & Nasimov, A. (2022). ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ, ИХ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ И ПОТОК. *Science and innovation*, 1(A7), 615-617.