Iqtisodiyot va pedagogika universiteti
“Matematika” kafedrasi dotsenti, PhD
X.Raximov taqrizi ostida

Muqumov Asqar
Iqtisodiyot va pedagogika universiteti,
katta o’qituvchi
asqarmuqumov@gmail.com

UDK 510.57

PARABOLIK TIPDAGI TENGLAMALAR UCHUN BOSHLANG’ICH CHEGARAVIY SHARTLAR

Annotatsiya: Ushbu maqolada parabolik tipdagi tenglamalar uchun boshlang‘ich va chegaraviy shartlar alohida holda tahlil qilindi. Tadqiqotda har xil shartlarning tenglama yechimlariga ta’siri o‘rganildi. Shuningdek, boshlang‘ich va chegaraviy shartlarning mosligi hamda ularning matematik modellashtirishdagi roli tahlil qilindi. Olingan natijalar parabolik tenglamalarni nazariy va amaliy yechishda muhim ilmiy asos yaratadi hamda issiqlik o‘tkazuvchanlik, diffuziya va boshqa fizik jarayonlarni modellashtirishda qo‘llaniladi.

Kalit so‘zlar: Parabolik tenglamalar, boshlang‘ich shartlar, chegaraviy shartlar, barqarorlik, yechimlarning mavjudligi, matematik modellashtirish, issiqlik o‘tkazuvchanlik, diffuziya jarayonlari.

Abstract: This article analyzes initial and boundary conditions for parabolic equations separately. The study examines the impact of various conditions on the solutions of the equations. Additionally, the consistency of initial and boundary conditions and their role in mathematical modeling are evaluated. The findings provide a significant scientific basis for both theoretical and practical solutions of parabolic equations and are applicable in modeling physical processes such as heat conduction, diffusion, and other phenomena.

Keywords: Parabolic equations, initial conditions, boundary conditions, stability, solution existence, mathematical modeling, heat conduction, diffusion processes.

Kirish. (Introduction)

Parabolik tipdagi tenglamalar zamonaviy matematik fizikaning asosiy bo‘limlaridan biri hisoblanadi va ko‘plab tabiiy va texnik jarayonlarni modellashtirishda muhim ahamiyat kasb etadi. Ushbu tenglamalar issiqlik o‘tkazuvchanlik, diffuziya jarayonlari, ekologik modellashtirish va boshqa ko‘plab sohalarda qo‘llaniladi. Ularning yechimlari korrekt bo‘lishi uchun boshlang‘ich va chegaraviy shartlarni to‘g‘ri qo‘yish alohida ahamiyatga ega. Mazkur maqolada parabolik tipdagi tenglamalar uchun boshlang‘ich va chegaraviy shartlar qo‘yishning nazariy va amaliy masalalari ko‘rib chiqiladi. Ushbu maqola, bir tomondan, matematik qiziqish uyg‘otuvchi mavzu sifatida, boshqa tomondan esa, turli jarayonlarni modellashtirishda amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan mavzu sifatida dolzarbdir. Shu bilan birga, maqolada qo‘llaniladigan usullar va yondashuvlar boshqa turdagi tenglamalar uchun ham keng qo‘llanilishi mumkin bo‘lgan umumiy nazariy asoslarni shakllantirishga xizmat qiladi. Mqolada davomida parabolik tenglamalar uchun klassik yondashuvlar, ularning yechimlarini aniqlashda yuzaga keluvchi muammolar va ularni hal qilish usullari batafsil yoritiladi. Shu bilan birga, boshlang‘ich va chegaraviy shartlarning tenglamalar yechimiga ta’siri o‘rganiladi. Bu esa, ko‘p hollarda, real fizik yoki texnik masalalarga yechim topishda muhim rol o‘ynaydi.

Tadqiqot metodologiyasi (Research Methodology)

Issiqlik tarqalish jarayoni sodir bo'layotgan uzunligi ℓ bo'lgan sterjenni qaraylik. Sterjenning o'qi sifatida Ox absissa o'qini olamiz. Faraz qilaylik, ixtiyoriy vaqtda sterjenning barcha nuqtasida bir xil harorat saqlansin. Sterjenning ixtiyoriy x nuqtasining t vaqtdagi temperaturasini $u = u(x,t)$ deb belgilaylik.

Agar sterjenning issiqlik sig'imi C, uning zichligi ρ, sterjenning issiqlik o'tkazuvchanlik koeffisenti k hamda ichki issiqlik manbaining zichligi F bo'lsa, u holda $u(x,t)$ funksiya quyidagi bir o'lchovli

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x}) + F\ , \ \ 0 < x < \ell, \ \ t > 0$$

Issiqlik tarqalish tenglamasini qanoatlantirilishini ko'rsatish qiyin emas.

Umuman olganda, c,ρ,k va F parametrlar x,t va u ning funksiyasi bo'ladi. Ko'plab taqbiqiy masalalarda bu funksiyalar sterjenda temperaturaning o'zgarishi bilan juda sokin o'zgaradi va c,ρ,k funksiyalar t vaqtga bog'liq bo'lmaydi. Shuning uchun ular faqat x o'zgaruvchining funksiyasi, F ni esa x va t ga bog'liq deb olish mumkin. Agar qaralayotgan ℓ uzunlikdagi sterjen bir jinsli bo'lsa u holda c,ρ,k funksiyalar o'zgarmasga teng bo'ladi va yuqoridagi tenglamani

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad (1)$$

ko'rinishda yozib olishimiz mumkin. Bu yerda $a^2 = \dfrac{k}{c\rho},\ \ f = \dfrac{F}{c\rho}$

Agar sterjenning harorati barcha nuqtasida bir xil bo'lmasa, u holda sterjenda issiqlik oqimi sodir bo'ladi. Bunda issiqlik oqimi sterjenning yuqori haroratli nuqtasidan past haroratli nuqtasi tomonga yo'nalgan bo'ladi. Sterjenning x ko'ndalang kesimi orqali birlik vaqtda Ox o'qi bo'ylab o'tayotgan issiqlik miqdori uchun

$$q(x,t) = -k(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

formula o'rinli bo'ladi. Bu yerda $q(x,t)$ funksiya issiqlik oqimining zichligi deyiladi.

Agar sterjenning x_0 nuqtasi orqali $(t_0, t_0 + dt)$ vaqtda issiqlik Ox bo'ylab tarqalayotgan bo'lsa, u holda $q(x,t)$ funksiyasi (x_0, t_0) nuqta atrofida musbat, aks holda manfiy deb olinadi.

Sterjenda issiqlik tarqalishini to'la aniqlash uchun (1) tenglamaning o'zi yetarli bo'lmaydi. Buning uchun sterjenning boshlang'ich temperaturasini va uning uchlaridagi issiqlik rejimini bilish zarur bo'ladi. Faraz qilaylik, $t=0$ vaqtda sterjenning x nuqtadagi harorati $\varphi(x)$ bo'lsin. U holda

$$u(x,0)=\varphi(x) \quad 0 \quad x \quad \ell \tag{2}$$

boshlang'ich shart beriladi.

Sterjenning $x=0$ va $x=\ell$ chetlarida uning harorati yoki issiqlik oqimining zichligi ma'lum bo'lishi yoki atrof-muhit bilan issiqlik almashinish shartlarini berish mumkin.

Agar sterjenning $x=0$ uchida $\mu_1(t)$ etmperatura va $x=\ell$ uchida issiqlik oqimining zichligi $\nu_1(t)$ ma'lum bo'lsa u holda

$$u(0,t)=\mu_1(t),\ -k(l)\frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x}=\nu_1(t) \tag{3}$$

chegaraviy shartlar beriladi.

Agar sterjenning $x=0$ va $x=\ell$ uchlarida issiqlik oqimining zichligi nolga teng bo'lsa, u holda sterjenning uchlari issiqlik o'tkazmaydigan deyiladi.

Masalan, agar sterjenning $x=\ell$ uchi issiqlik o'tkazmaydigan bo'lsa, bu holda

$$\frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x}=0 \tag{4}$$

chegaraviy shart beriladi.

Agar sterjening uchlarida atrof-muhit bilan issiqlik almashinishi sodir bo'layotgan bo'lsa, u holda birlik vaqtda sterjenning x kesimidan atrof-muhitga chiqayotgan issiqlik miqdor sterjenning temperaturasidan atrof-muhit temperaturasining ayirmasiga proporsional bo'ladi, ya'ni

$$q=H(u-u_0),$$

Bu yerda H - issiqlik almashinish koeffisenti, u - sterjenning, u_0 - esa atrof-muhitning temperaturasi.

Issiqlik oqimi zichligining fizikaviy xossasiga asosan sterjenning $x=0$ va $x=\ell$ uchlarida

$$k(0)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=H_1[u(0,t)-p_1(t)] \quad (5)$$

$$k(\ell)\frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x}=H_2[u(0,t)-p_2(t)] \quad (6)$$

issiqlik almashinish shartlarini olamiz.

Bu yerda H_1 va H_2 - sterjenning mos ravishda chap va o'ng uchlarining issiqlik o'tkazuvchanlik koeffisenti, $p_1(t)$ va $p_2(t)$ mos ravishda sterjenning uchlari atrofining harorati.

Yuqoridagi (5)-(6) chegaraviy shartlarni quyidagi

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}-h_1u(0,t)=\mu_1(t) \quad (7)$$

$$\frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x}-h_2u(\ell,t)=\mu_2(t) \quad (8)$$

ko'rinishda yozib olish mumkin. Bu yerda

$$h_1=\frac{H_1}{k(0)}>0, \qquad h_2=\frac{H_2}{k(\ell)}>0,$$

$$\mu_1(t)=-\frac{H_1}{k(0)}p_1(t), \qquad \mu_2(t)=-\frac{H_2}{k(\ell)}p_2(t)$$

Natijalar va muhokama (Results and Discussions)

Issiqlik tarqalish tenglamsi uchun yuqorida keltirilgan chegaraviy shartlarni umumiy holda

$$\alpha_1\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}+\beta_1u(0,t)=\mu_1(t), \quad t>0 \quad (9)$$

$$\alpha_2\frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x}+\beta_2u(\ell,t)=\mu_2(t), \quad t>0 \quad (10)$$

yozish mumkin. Bunda α_1, α_2, β_1 va β_2 - berilgan o'zgarmaslar, ular uchun ushbu

$$\alpha_1^2+\beta_1^2>0, \qquad \alpha_2^2+\beta_2^2>0$$

tengsizliklar o'rinli, $\mu_1(t)$ va $\mu_2(t)$ berilgan funksiyalar.

Agar $\alpha_i = 0$ va $\beta_i \quad 0$ bo'lsa, u holda (9), (10) shartlar

$u(0,t) = \mu_1(t)$, $u(\ell,t) = \mu_2(t)$ ko'rinishni oladi va ular birinchi tur chegaraviy shartlar deyiladi.

Agar $\alpha_i \quad 0$ va $\beta_i = 0$ bo'lsa, u holda (9), (10) shartlar ikkinchi tur chegaraviy shartlar deyiladi va ular

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \nu_1(t), \qquad \frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x} = \nu_2(t)$$

ko'rinishda ifodalanadi.

Agar $\alpha_i \quad 0$ va $\beta_i \quad 0$ bo'lsa, u holda (9), (10) shartlar uchinchi tur chegaraviy shartlar deyiladi.

Xulosa va takliflar (Conclusion/Recommendations)

Ushbu maqolada parabolik tipdagi tenglamalar uchun boshlang'ich va chegaraviy shartlarning har biri alohida holda o'rganildi. Tadqiqot davomida har xil shartlarning yechimlar sifatiga, ularning barqarorligi va mavjudlik sharoitlariga ta'siri tahlil qilindi. Shuningdek, maqolada boshlang'ich va chegaraviy shartlarning mosligi hamda ularning matematik modellashtirishdagi roli chuqur o'rganilib, bu shartlarning noaniqliklari qanday muammolarni keltirib chiqarishi haqida tavsiyalar berildi. Olingan natijalar parabolik tipdagi tenglamalarni yechishda qo'llaniladigan usullarni takomillashtirish va yangi yondashuvlarni ishlab chiqishda muhim asos bo'lib xizmat qiladi. Tadqiqot natijalari shuni ko'rsatdiki, boshlang'ich va chegaraviy shartlarni to'g'ri qo'yish nafaqat nazariy masalalarda, balki amaliy qo'llanmalarda ham muhim ahamiyatga ega. Bu esa issiqlik o'tkazuvchanlik, diffuziya, ekologik modellashtirish kabi ko'plab masalalarda yuqori aniqlikdagi yechimlarni olish imkonini beradi. Ushbu yondashuvlar va natijalar kelajakdagi tadqiqotlar uchun keng imkoniyatlar ochib beradi

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati (References)

1. Salohitdinov M. Matematik fizika tenglamalari //Toshkent, "O'zbekiston nashriyoti" 2002-yil
2. Salohitdinov M. Islomov B. Matematik fizika tenglamalari fanidan misol va masalalar to'plami// Toshkent, "Mumtoz so'z" nashriyoti 2010-yil
3. Zikirov O. Matematik fizika tenglamalari// Toshkent, 2017-yil
4. Мукумов А. Х. О КОРРЕКТНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА //Ta'limning zamonaviy transformatsiyasi. – 2024. – Т. 4. – №. 2. – С. 243-246.
5. Muqumov A.H. BIR O 'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING FURE ALMASHTIRISHI VA XOSSALARI //Educational Research in Universal Sciences. – 2024. – Т. 3. – №. 4 SPECIAL. – С. 545-548.
6. Muqumov A. H. IKKINCHI TARTIBLI TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY MASALANING UMUMLASHGAN VA KUCHSIZ YECHIMLARI //International journal of scientific researchers (IJSR) INDEXING. – 2023. – Т. 3. – №. 2.

7. Bahodir, R. ., & Asqar, M. . (2024). TOR TEBRANISH TENGLAMASI UCHUN ARALASH MASALA YECHIMINING YAGONALIGI. *JOURNAL OF THEORY, MATHEMATICS AND PHYSICS*, *3*(10), 17–20. Retrieved from https://jtmp.innovascience.uz/index.php/journal/article/view/196
8. Asqar, M. ., & Jo`rabek, T. . (2024). KOSHI MASALASI YECHIMINING TURG'UNLIGI. JOURNAL OF THEORY, MATHEMATICS AND PHYSICS, 3(10), 3–5. Retrieved from https://jtmp.innovascience.uz/index.php/journal/article/view/193