ISSN: 2181-4341, IMPACT FACTOR (RESEARCH BIB) – 7,245, SJIF – 5,431

Богдан Анна Михайловна
Ферганский Государственный Университет,
факультета математики-информатики,
направление математики,
студентка третьего курса
E-mail: annabogdan2305539@gmail.com

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА – ПУАССОНА – ДАРБУ МЕТОДОМ СФЕРИЧЕСКИХ СРЕДНИХ

Аннотация: В статье рассматривается решение задачи Коши для многомерного обобщенного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу с использованием метода сферических средних. Основное внимание уделяется разработке и анализу подхода, который позволяет эффективно обрабатывать сложные многомерные задачи, возникающие в теории нелинейных уравнений и математической физике. Метод сферических средних предоставляет новый инструмент для упрощения вычислений и получения аналитических решений, что особенно актуально для задач с высокими размерностями. В статье представлены теоретические обоснования предложенного метода, а также его применения к конкретным классам уравнений. Результаты показывают, что предложенный подход может существенно улучшить качество и скорость решения задач Коши, открывая новые возможности для исследований в области математического моделирования.

Ключевые слова: Дифференциальные уравнения в частных производных с сингулярными коэффициентами, кривизна поверхностей, Единственность решения задачи Коши, классический метод сферических средних.

Дифференциальные уравнения в частных производных с сингулярными коэффициентами имеют богатую историю. Впервые уравнение

$$u_{xy} - \frac{\alpha}{x-y}u_x + \frac{\beta}{x-y}u_y + \frac{\gamma}{(x-y)^2}u = 0, \qquad (1)$$

где α, β, γ - const, получено Л.Эйлером [1] в связи с изучением движения воздуха в трубах разного сечения и колебаний струн переменной толщины. Он дал решение этого уравнения при $\alpha = \beta = m, \gamma = n$, где $m, n \quad N$.

Общее решение уравнения (1) при $\alpha = \beta$ нашел Б.Риман [2], построивший решение задачи Коши с помощью вспомогательной функции и методом, который впоследствии был назван его именем.

Уравнение типа (1), но в форме

$$E^{-}_{q,p}(u) \quad u_{xx} - u_{yy} - \frac{2q}{y}u_x - \frac{2p}{y}u_y = 0, \qquad (2)$$

ISSN: 2181-4341, IMPACT FACTOR (RESEARCH BIB) – 7,245, SJIF – 5,431

где q, p - const, с $q=0$ решил С.Пуассон [3] найдя для него гиперболический аналог представления решений, называемый представлением Пуассона. В этой работе он также рассмотрел уравнение

$$L_p(u) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2p}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0\,, \qquad (3)$$

при $n=3,\ p=1$.

Значительно позже уравнение (2) при $q=0,\ 0<p<1$ встречалось при исследовании вопросов кривизны поверхностей в монографии Г.Дарбу [4], где оно названо уравнением Эйлера-Пуассона. Поэтому впоследствии многие авторы стали называть уравнения вида (1), (2), (3) и их эллиптические аналоги уравнениями Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Интерес к таким уравнениям значительно увеличился после публикации в 1923 году первого издания книги Ф.Трикоми [5], где уравнения вида (1), (2) и

$$E_{q,p}^{+}(u) \equiv u_{xx} + u_{yy} + \frac{2q}{y}u_x + \frac{2p}{y}u_y = 0\,, \qquad (4)$$

при $q=0,\ p=1/6$ существенно использованы при исследовании краевой задачи для уравнения смешанного эллиптико - гиперболического типа $yu_{xx}+u_{yy}=0$, названного впоследствии уравнением Трикоми. Тем более многие уравнения смешанного типа, например, обобщенное уравнение Трикоми, уравнение Кароля, ряд уравнений смешанного типа с вырождением типа и порядка и т.д., в областях своей гиперболичности сводятся к уравнению Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Тем не менее с помощью замены переменных можно привести довольно широкий класс вырождающихся уравнений, как первого, так и второго рода к уравнениям с сингулярными коэффициентами. Например, уравнение с вырождением тип и порядка

$$y^m \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - y^k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \alpha y^{k-1}\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda^2 y^k u = 0\,,$$

при помощи замены $t=[2/(m-k-2)]y^{\frac{m-k+2}{2}}$ сводиться к уравнению

$$L_p^{\lambda}(u) \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{2p}{t}\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda^2 u = 0\,. \qquad (5)$$

Более подробные информации по этому направлению можно найти в монографиях А.В.Бицадзе [6] и М.М.Смирнова [7-8].

Важную роль в создании теории уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу и их аналогов сыграли работы A.Weinstein [9-13]. В этих статьях A.Weinstein при разных значениях параметра p исследовал задачу Коши для уравнения (3) с полуоднородными начальными условиями

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=0,\ \ x \quad R^n \qquad (6)$$

и ее решение получено в явном виде.

Здесь также указаны формулы соответствий вида

$$E^{+}_{q,p}(y^{1-2p}u)=y^{1-2p}E^{+}_{q,1-p}(u)\,, \qquad (7)$$

для уравнения (4) при $q=0,\ 0<p<1/2$. Отметим, что формула типа (7) встречалась еще у G.Darboux [4].

Задачу Коши с начальными условиями

$$u(x,0)=\varphi(x), \qquad \lim_{t\to+0} t^{2p}u_t(x,t)=\psi(x),\ \ x \quad R^n\,, \qquad (8)$$

для уравнения (5) при $\lambda \quad 0,\ 0<p<1/2,\ n=1,2$ исследовал М.Б.Капилевич в работе [14], а при $n=3$ она исследована в [15].

В работе E.C.Young [16] содержится обзор исследований сингулярной задачи Коши $\{(3), (8)\}$. В работах J.B.Diaz, H.F.Weinberger [17], E.K. Blum [18] задача $\{(3), (8)\}$ исследована при различных значениях параметра p.

Единственность решения задачи Коши $\{(3), (8)\}$ доказана в работах E.K. Blum [19], D.W. Bresters [20], D.W. Fox [21]. Однако как показано в работе D.W. Bresters [20], решение этой задачи в случае $p<0$ не является единственным.

В данной работе рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения (5), с начальными условиями (8) при $0<p<1/2$ и $\lambda \quad 0,\ n \quad 1$. Для решения этой задачи применим метод сферических средних [22].

Пусть $S(x,r)=\left\{\xi:\left|\xi-x\right|=r\right\}$ - сфера радиуса r с центром в точке $x \quad R^n$, где $\left|\xi-x\right|^2=\ \ {}_{k=1}^{n}(\xi_k-x_k)^2$ расстояние между точками ξ и x. Пусть, далее,

$$U(x,r,t)=\frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\ {}_{S(x,r)}\, u(\xi,t)\,d\sigma_\xi=\frac{1}{\omega_n}\ {}_{S(O,1)}\, u(x+r\eta,t)\,d\omega\,, \qquad (9)$$

где $\omega_n=2\pi^{(n/2)}/\Gamma\left(n/2\right)$, $S(O,1)=\{\eta:\left|\eta\right|=1\}$ - единичная сфера с центром в начале координат, $d\sigma_\xi$ - элемент поверхности сферы $S(x,r)$, $d\omega$ -элемент поверхности единичной сферы, причем $d\sigma_\xi=r^{n-1}d\omega$, $\Gamma(z)$ - гамма – функция Эйлера.

Очевидно, что равенство (9) является средним арифметическим значением функции $u(x,t)$ на сфере $S(x,r)$.

Применяя классический метод сферических средних [22], можно показать, что если функция $u(x,t)$ является решением задачи Коши {(5), (8)}, то функция $U(x,r,t)$ будет решением уравнения

$$U_{rr} + \frac{n-1}{r}U_r - U_{tt} - \frac{2p}{t}U_t - \lambda^2 U = 0, \qquad (10)$$

удовлетворяющее начальным

$$U(x,r,0) = \Phi(x,r), x \quad R^n, r \quad R_+^1, \lim_{t\to+0} t^{2p}U_t(x,r,t) = \Psi(x,r), x \quad R^n, r \quad R_+^1, \qquad (11)$$

и граничным условиям

$$U_r(x,0,t) = 0, x \quad R^n, t > 0, \qquad (12)$$

где

$$\Phi(x,r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} {}_{S(x,r)} \varphi(\xi) d\sigma_\xi = \frac{1}{\omega_n} {}_{S(O,1)} \varphi(x + r\eta) d\omega, \qquad (13)$$

$$\Psi(x,r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} {}_{S(x,r)} \psi(\xi) d\sigma_\xi = \frac{1}{\omega_n} {}_{S(O,1)} \psi(x + r\eta) d\omega, \qquad (14)$$

причем $\Phi_r(x,0) = 0, \ \Psi_r(x,0) = 0$.

Учитывая равенство

$$U_{rr} + \frac{n-1}{r}U_r = r^{-(n-1)} \frac{\partial}{\partial r} \ r^{n-1}\frac{\partial U}{\partial r}$$

и умножая уравнение (10) на r^{n-2}, перепишем ее в виде

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \ r^{n-1}\frac{\partial U}{\partial r} \ - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(r^{n-2}U\right) - \frac{2p}{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(r^{n-2}U\right) - \lambda^2\left(r^{n-2}U\right) = 0. \qquad (15)$$

Пусть $n = 2k+1$. Применяя к уравнению (15) дифференциальный оператор $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}^{\ k-1}$, получим

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k}\left(r^{2k}\frac{\partial U}{\partial r}\right)-\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}U\right)-$$

$$-\frac{2p}{t}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}U\right)-\lambda^2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}U\right)=0. \qquad (16)$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1 ([23]). Если $w(r)\in C^{k+1}$, $k=1,2,\dots$, то справедливы равенства

1. $$\frac{d^2}{dr^2}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}w\right)=\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k}\left(r^{2k}\frac{dw}{dr}\right), \qquad (17)$$
2. $$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}w\right)=\sum_{j=0}^{k-1}A_j^k r^{j+1}\frac{d^j w}{dr^j}, \qquad (18)$$

где $A_j^k=const$, причем $A_0^k=1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2k-1)=(2k-1)!!$.

Эту лемму можно доказать методом математической индукции.

Введя обозначение

$$V(x,r,t)=\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^{k-1}\left(r^{2k-1}U\right), \qquad (19)$$

и учитывая лемму 1, относительно функции $V(x,r,t)$ получим задачу нахождения решения уравнения

$$V_{rr}-V_{tt}-\frac{2p}{t}V_t-\lambda^2V=0, \qquad (20)$$

удовлетворяющего начальным

$$V(x,r,0)=f(x,r),\ x\in R^n,\ r>0,\ \lim_{t\to+0}t^{2p}V_t(x,r,t)=g(x,r),\ x\in R^n,\ r>0 \qquad (21)$$

и граничным условиям

$$V(x,0,t)=0,\ x\in R^n,\ t>0, \qquad (22)$$

где

$$f(x,r)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}{}^{k-1}\left(r^{2k-1}\Phi(x,r)\right), \tag{23}$$

$$g(x,r)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}{}^{k-1}\left(r^{2k-1}\Psi(x,r)\right). \tag{24}$$

В работе [14] задача {(20), (21)} решена при $-\quad <r<\quad ,t>0$. Чтобы применить данное решение, учитывая условие (22), продолжим нечетным образом начальные данные $f(x,r)$ и $g(x,r)$ на интервал $-\quad <r<0$ и продолженные функции обозначим через $f_1(x,r)$ и $g_1(x,r)$ соответственно.

Тогда решение задачи {(20), (21)} имеет вид [14]

$$V(x,r,t)=\gamma_1 {}_{-1}^{1} f_1(x,r+t\xi)Q(\xi,t;\lambda,1-p)d\xi+$$

$$+\gamma_2 t^{1-2p} {}_{-1}^{1} g_1(x,r+t\xi)Q(\xi,t;\lambda,p)d\xi\ , \tag{25}$$

где $\gamma_1=\Gamma(p+1/2)/(\sqrt{\pi}\Gamma(p))$, $\gamma_2=\Gamma((1/2)-p)/(\sqrt{\pi}\Gamma(1-p))$, $Q(\xi,t,\lambda,p)=(1-\xi^2)^{-p}\bar{J}_{-p}(\lambda t\sqrt{1-\xi^2})$, причем $Q(-\xi,t,\lambda,p)=Q(\xi,t,\lambda,p)$, $\bar{J}_\nu(z)$ – функция Бесселя – Клиффорда [14], которая выражается через функции Бесселя $J_\nu(z)$ по формуле $\bar{J}_\nu(z)=\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu}J_\nu(z)$.

Произведя замену переменных интегрирования $\eta=t\xi$ и учитывая нечетность функций $f_1(x,r)$ и $g_1(x,r)$ по переменной r, после несложных преобразований, равенство (25) перепишем в виде

$$V(x,r,t)=\gamma_1 t^{1-2p} {}_{0}^{t} [f_1(x,\eta+r)-f_1(x,\eta-r)]Q_1(\eta,t;\lambda,1-p)d\eta+$$

$$+\gamma_2 {}_{0}^{t} [g_1(x,\eta+r)-g_1(x,\eta-r)]Q_1(\eta,t;\lambda,p)d\eta\ , \tag{26}$$

где $Q_1(\eta,t;\lambda,p)=(t^2-\eta^2)^{-p}\bar{J}_{-p}(\lambda\sqrt{t^2-\eta^2})$.

Для нахождения решения задачи Коши {(5), (8)} воспользуемся следующим свойством среднее сферических [22]

$$u(x,t)=\lim_{r\to 0}U(x,r,t). \qquad (27)$$

Из (19) в силу (18) имеем

$$U(x,r,t)=\frac{V(x,r,t)}{A_0^k r}-\sum_{j=1}^{k-1}A_j^k r^j\frac{\partial^j U}{\partial r^j}=\frac{V(x,r,t)}{A_0^k r}-O(r).$$

Учитывая это из (27) получим

$$u(x,t)=\lim_{r\to 0}U(x,r,t)=\frac{1}{A_0^k}\lim_{r\to 0}\frac{V(x,r,t)}{r}. \qquad (28)$$

Применяя правило Лопиталля [24], после несложных вычислений находим

$$u(x,t)=\frac{2\gamma_1}{A_0^k}t^{1-2p}\int_0^t Q_1(\eta,t;\lambda,1-p)\frac{\partial f(x,\eta)}{\partial\eta}d\eta+$$

$$+\frac{2\gamma_2}{A_0^k}\int_0^t Q_1(\eta,t;\lambda,p)\frac{\partial g(x,\eta)}{\partial\eta}d\eta. \qquad (29)$$

Принимая во внимание (23) и (24), соответственно имеем

$$\frac{\partial f(x,\eta)}{\partial\eta}=\eta\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^k\left(\eta^{2k-1}\Phi(x,\eta)\right), \qquad (30)$$

$$\frac{\partial g(x,\eta)}{\partial\eta}=\eta\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^k\left(\eta^{2k-1}\Psi(x,\eta)\right). \qquad (31)$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2 ([25]). Если $\lim\limits_{\eta\to 0}\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^{k-1}\mathrm{T}(x,\eta)=0,\ k=1,2,\ldots,$ то имеет место равенство

$$\int_0^t Q_1(\eta,t;\lambda,\beta)\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\right)^k\mathrm{T}(x,\eta)\eta d\eta=\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^k\int_0^t Q_1(\eta,t;\lambda,\beta)\mathrm{T}(x,\eta)\eta d\eta.$$

В силу (18) для функций $\mathrm{T}(x,\eta)=\eta^{2k-1}\Phi(x,\eta)$ и $\mathrm{T}(x,\eta)=\eta^{2k-1}\Psi(x,\eta)$ условия леммы 2 выполняются. Поэтому применяя лемму 2 к равенству (29) с учетом (30) и (31), получим

$$u(x,t)=\frac{2\gamma_1}{A_0^k}t^{1-2p}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k}\int_0^t Q_1(\eta,t;\lambda,1-p)\eta^{2k}\Phi(x,\eta)\,d\eta+$$

$$+\frac{2\gamma_2}{A_0^k}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{k}\int_0^t Q_1(\eta,t;\lambda,p)\eta^{2k}\Psi(x,\eta)\,d\eta\,. \qquad (32)$$

Далее, учитывая (13) и (14), после несложных преобразований получим

$$u(x,t)=\tilde{\gamma}_1 t^{1-2p}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\int_{|\xi-x|<t}\varphi(\xi)\left(t^2-|\xi-x|^2\right)^{p-1}\bar{J}_{p-1}\left(\lambda\sqrt{t^2-|\xi-x|^2}\right)d\xi+$$

$$+\tilde{\gamma}_2\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-1}{2}}\int_{|\xi-x|<t}\psi(\xi)\left(t^2-|\xi-x|^2\right)^{-p}\bar{J}_{-p}\left(\lambda\sqrt{t^2-|\xi-x|^2}\right)d\xi\,, \qquad (33)$$

где $\tilde{\gamma}_1=\dfrac{\Gamma(p+(1/2))\Gamma(n/2)}{\pi^{(n+1)/2}(2n+1)!!\Gamma(p)}$, $\tilde{\gamma}_2=\dfrac{\Gamma((1/2)-p)\Gamma(n/2)}{\pi^{(n+1)/2}(2n+1)!!\Gamma(1-p)}$.

Если $\varphi(x),\ \psi(x)\in C^{[n/2]+2}(R^n)$, где $[n/2]$ - означает, целую часть числа $(n/2)$, то функция $u(x,t)$, определяемая равенством (33), при нечетном $n\geq 1$ является регулярным решением задачи Коши {(5), (8)}.

При четном $n=2k$, применяя метод спуска Адамара [22, 23], из (33) получим

$$u(x,t)=\tilde{\gamma}_1 t^{1-2p}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{|\xi-x|<t}\varphi(\xi)\left(t^2-|\xi-x|^2\right)^{p-(1/2)}\bar{J}_{p-(1/2)}\left(\lambda\sqrt{t^2-|\xi-x|^2}\right)d\xi+$$

$$+\tilde{\gamma}_2\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n}{2}}\int_{|\xi-x|<t}\psi(\xi)\left(t^2-|\xi-x|^2\right)^{(1/2)-p}\bar{J}_{(1/2)-p}\left(\lambda\sqrt{t^2-|\xi-x|^2}\right)d\xi\,, \qquad (34)$$

где $\tilde{\gamma}_1=\Gamma(n/2)/[\pi^{n/2}(2n)!!]$, $\tilde{\gamma}_2=\Gamma(n/2)/[\pi^{n/2}(2n)!!(1-2p)]$.

Таким образом, если $\varphi(x),\psi(x)\in C^{[n/2]+2}(R^n)$, то функция $u(x,t)$, определяемая равенством (34), при четном $n\geq 2$ является решением уравнения (5), удовлетворяющим начальным условиям (8).

Полученные здесь формулы (33) и (34) совпадают с результатами работы [25-28] в которой задача Коши {(5), (8)} решена с применением операторов дробного порядка Эрдейи-Кобера.

Формула (33) при нечетном n 1, а формула (34) при четном n 2 получены при условии $0 < p < (1/2)$. При остальных значениях параметра p, решение задачи {(5), (8)} определяется путем аналитического продолжения по параметру p, решений, определяемые формулами (33) и (34).

Литература

1. Эйлер Леонард. Интегральное исчисление. -М.: ГИФМЛ, 1958. т.3. 447 с.
2. Reimann B. Vercuch einer allgemeinen auffassung der integration und differentiation // Gessammelte Mathematische Werke. Leipzing: Teubner, 1876. P.331-334.
3. Poisson S.D. Memoire sur L'integration des equations lineaires aux differences partielles // J.l'Ecole Rog. Politechn, 1823, n.12. P. 215-248.
4. Darboux G. Lecons sur la theorie generale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal. Paris: Gauthier-Villars. 1915. Vol.2.
5. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.:Л.-Гостезиздат, 1947, 192 с.
6. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
7. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966. 292 с.
8. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 295 с.
9. Weinstein A. Sur le probleme de Cauchy pour l'equation de Poisson et l'equation des ondes // C.R. Acad. Sci. Pris. 1952. T. 234. P. 2584-2585.
10. Weinstein A. Generalized axially symmetric potential theory // Bull. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 59? N 1. P. 20-38.
11. Weinstein A. On the wave equation and the equation of Euler-Poisson // Wave motion and vibration theory. Proc. Sympos. Appl. Math. N. Y. : McGraw-Hill, 1954. Vol.5. P. 137-147.
12. Weinstein A. The generalized radiation problem and the Euler-Poisson-Darboux equation. // Summa Brasil Math. 1955. Vol. 3. P. 125-147.
13. Weinstein A. On a singular differential operator. //Ibid. 1960. T. 49. P. 359-365.
14. Капилевич М.Б. Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа.//Математический сборник. 1952. т.30 (72) №1 с. 11-38.
15. Каримов Ш.Т. Задача Коши для многомерного уравнения Эйлера - Пуассона - Дарбу со спектральным параметром. // Труды международной научной конференции "'Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики." Ташкент. 2004.т.1 ст.~234 - 235.
16. Young E.C. On a generalized Euler-Poisson-Darboux equation //J. Math. and Mech. 1969. Vol.18, N 12. P.1167-1175.
17. Diaz J.B., Weinberger H.F. A solution of the singular initial value problem for the Euler-Poisson-Darboux equation// Proc. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 4, N 5. P. 703-715.
18. Blum E. K. The Euler-Poisson-Darboux equation in the exceptional cases //Proc. Amer. Math. Soc. 1954. Vol. 5, N 4. P. 511-520.
19. Blum E. K.: A uniqueness theorems for the Euler - Poisson - Darboux equation, Bull.Amer. Math. Soc.Abstract 59-4-350.
20. Bresters D. W. On the Euler - Poisson - Darboux equation. //SIAM J. Math. Anal. 1973. Vol. 4, N 1. P. 31.41.
21. Fox D.W.: The solution and Huygens' principle for a singular Cauchy problem, J.Math.Mech. 8 (1959), 197_220.
22. Курант Р. Уравнения с частными производными. -М.; Мир, 1964. с. 830.
23. Evans L.C. Partial Differential Equation. AMS, Berkeley, 1997. 664 p.
24. Ильин В.А., Позняк Э.Г., Основы математического анализа, часть I, II, М: "Наука", 1973.

25. Urinov A.K., Karimov S.T. Solution of the Cauchy Problem for Generalized Euler-Poisson-Darboux Equation by the Method of Fractional Integrals. Progress in Partial Differential Equations. Springer International Publishing, (2013), 321-337.
26. Karimov S.T. The Cauchy Problem for the Iterated Klein–Gordon Equation with the Bessel Operator. Lobachevskii Journal of Mathematics, 41 (5), -2020, pp. 772 – 784.
27. Karimov S.T., Shishkina E.L. Some methods of solution to the Cauchy problem for a inhomogeneous equation of hyperbolic type with a Bessel operator. Journal of Physics: Conference Series, 1203 (1), -2019.
28. Urinov A.K., Karimov S.T. On the Cauchy Problem for the Iterated Generalized Two-axially Symmetric Equation of Hyperbolic Type. Lobachevskii Journal of Mathematics, 41 (1),-2020, pp. 102 - 110