

**Богдан Анна Михайловна**

Ферганский Государственный Университет, факультета математики-информатики,

направление математики, студентка третьего курса

E-mail: [annabogdan2305539@gmail.com](mailto:annabogdan2305539@gmail.com)

---

## **РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ МНОГОМЕРНОГО ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА – ПУАССОНА – ДАРБУ МЕТОДОМ СФЕРИЧЕСКИХ СРЕДНИХ**

**Аннотация:** В статье рассматривается решение задачи Коши для многомерного обобщенного уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу с использованием метода сферических средних. Основное внимание уделяется разработке и анализу подхода, который позволяет эффективно обрабатывать сложные многомерные задачи, возникающие в теории нелинейных уравнений и математической физике. Метод сферических средних предоставляет новый инструмент для упрощения вычислений и получения аналитических решений, что особенно актуально для задач с высокими размерностями. В статье представлены теоретические обоснования предложенного метода, а также его применения к конкретным классам уравнений. Результаты показывают, что предложенный подход может существенно улучшить качество и скорость решения задач Коши, открывая новые возможности для исследований в области математического моделирования.

**Ключевые слова:** Дифференциальные уравнения в частных производных с сингулярными коэффициентами, кривизна поверхностей, Единственность решения задачи Коши, классический метод сферических средних.

---

Дифференциальные уравнения в частных производных с сингулярными коэффициентами имеют богатую историю. Впервые уравнение

$$u_{xy} - \frac{\alpha}{x-y}u_x + \frac{\beta}{x-y}u_y + \frac{\gamma}{(x-y)^2}u = 0, \quad (1)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  - const, получено Л.Эйлером [1] в связи с изучением движения воздуха в трубах разного сечения и колебаний струн переменной толщины. Он дал решение этого уравнения при  $\alpha = \beta = m, \gamma = n$ , где  $m, n \in \mathbb{N}$ .

Общее решение уравнения (1) при  $\alpha = \beta$  нашел Б.Риман [2], построивший решение задачи Коши с помощью вспомогательной функции и методом, который впоследствии был назван его именем.

Уравнение типа (1), но в форме

$$E_{q,p}^{-}(u) \equiv u_{xx} - u_{yy} - \frac{2q}{y}u_x - \frac{2p}{y}u_y = 0, \quad (2)$$

где  $q, p$  - const, с  $q=0$  решил С.Пуассон [3] найдя для него гиперболический аналог представления решений, называемый представлением Пуассона. В этой работе он также рассмотрел уравнение

$$L_p(u) \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{2p}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (3)$$

при  $n=3, p=1$ .

Значительно позже уравнение (2) при  $q=0, 0 < p < 1$  встречалось при исследовании вопросов кривизны поверхностей в монографии Г.Дарбу [4], где оно названо уравнением Эйлера-Пуассона. Поэтому впоследствии многие авторы стали называть уравнения вида (1), (2), (3) и их эллиптические аналоги уравнениями Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Интерес к таким уравнениям значительно увеличился после публикации в 1923 году первого издания книги Ф.Трикоми [5], где уравнения вида (1), (2) и

$$E_{q,p}^{+}(u) \equiv u_{xx} + u_{yy} + \frac{2q}{y}u_x + \frac{2p}{y}u_y = 0, \quad (4)$$

при  $q=0, p=1/6$  существенно использованы при исследовании краевой задачи для уравнения смешанного эллипτικο - гиперболического типа  $yu_{xx} + u_{yy} = 0$ , названного впоследствии уравнением Трикоми. Тем более многие уравнения смешанного типа, например, обобщенное уравнение Трикоми, уравнение Кароля, ряд уравнений смешанного типа с вырождением типа и порядка и т.д., в областях своей гиперболичности сводятся к уравнению Эйлера-Пуассона-Дарбу.

Тем не менее с помощью замены переменных можно привести довольно широкий класс вырождающихся уравнений, как первого, так и второго рода к уравнениям с сингулярными коэффициентами. Например, уравнение с вырождением тип и порядка

$$y^m \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - y^k \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \alpha y^{k-1} \frac{\partial u}{\partial y} - \lambda^2 y^k u = 0,$$

при помощи замены  $t = [2/(m-k-2)]y^{\frac{m-k+2}{2}}$  сводиться к уравнению

$$L_p^\lambda(u) \equiv \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{2p}{t} \frac{\partial u}{\partial t} - \lambda^2 u = 0. \quad (5)$$

Более подробные информации по этому направлению можно найти в монографиях А.В.Бицадзе [6] и М.М.Смирнова [7-8].

Важную роль в создании теории уравнений Эйлера-Пуассона-Дарбу и их аналогов сыграли работы А.Weinstein [9-13]. В этих статьях А.Weinstein при разных значениях параметра  $P$  исследовал задачу Коши для уравнения (3) с полуднородными начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), u_t(x, 0) = 0, x \in R^n \tag{6}$$

и ее решение получено в явном виде.

Здесь также указаны формулы соответствий вида

$$E_{q,p}^+(y^{1-2p}u) = y^{1-2p}E_{q,1-p}^+(u), \tag{7}$$

для уравнения (4) при  $q = 0, 0 < p < 1/2$ . Отметим, что формула типа (7) встречалась еще у G.Darboux [4].

Задачу Коши с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x), \lim_{t \rightarrow +0} t^{2p} u_t(x, t) = \psi(x), x \in R^n, \tag{8}$$

для уравнения (5) при  $\lambda \neq 0, 0 < p < 1/2, n = 1, 2$  исследовал М.Б.Капилевич в работе [14], а при  $n = 3$  она исследована в [15].

В работе E.C.Young [16] содержится обзор исследований сингулярной задачи Коши {(3), (8)}. В работах J.B.Diaz, H.F.Weinberger [17], E.K. Blum [18] задача {(3), (8)} исследована при различных значениях параметра  $P$ .

Единственность решения задачи Коши {(3), (8)} доказана в работах E.K. Blum [19], D.W. Bresters [20], D.W. Fox [21]. Однако как показано в работе D.W. Bresters [20], решение этой задачи в случае  $P < 0$  не является единственным.

В данной работе рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения (5), с начальными условиями (8) при  $0 < p < 1/2$  и  $\lambda \neq 0, n \geq 1$ . Для решения этой задачи применим метод сферических средних [22].

Пусть  $S(x, r) = \{\xi : |\xi - x| = r\}$  - сфера радиуса  $r$  с центром в точке  $x \in R^n$ , где  $|\xi - x|^2 = \sum_{k=1}^n (\xi_k - x_k)^2$  расстояние между точками  $\xi$  и  $x$ . Пусть, далее,

$$U(x, r, t) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{S(x,r)} u(\xi, t) d\sigma_\xi = \frac{1}{\omega_n} \int_{S(O,1)} u(x + r\eta, t) d\omega \tag{9}$$

где  $\omega_n = 2\pi^{(n/2)} / \Gamma(n/2)$ ,  $S(O,1) = \{\eta : |\eta| = 1\}$  - единичная сфера с центром в начале координат,  $d\sigma_\xi$  - элемент поверхности сферы  $S(x,r)$ ,  $d\omega$  - элемент поверхности единичной сферы, причем  $d\sigma_\xi = r^{n-1} d\omega$ ,  $\Gamma(z)$  - гамма – функция Эйлера.

Очевидно, что равенство (9) является средним арифметическим значением функции  $u(x,t)$  на сфере  $S(x,r)$ .

Применяя классический метод сферических средних [22], можно показать, что если функция  $u(x,t)$  является решением задачи Коши {(5), (8)}, то функция  $U(x,r,t)$  будет решением уравнения

$$U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r - U_{tt} - \frac{2p}{t} U_t - \lambda^2 U = 0, \tag{10}$$

удовлетворяющее начальным

$$U(x,r,0) = \Phi(x,r), x \in R^n, r \in R_+, \lim_{t \rightarrow +0} t^{2p} U_t(x,r,t) = \Psi(x,r), x \in R^n, r \in R_+, \tag{11}$$

и граничным условиям

$$U_r(x,0,t) = 0, x \in R^n, t > 0, \tag{12}$$

где

$$\Phi(x,r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{S(x,r)} \varphi(\xi) d\sigma_\xi = \frac{1}{\omega_n} \int_{S(O,1)} \varphi(x+r\eta) d\omega, \tag{13}$$

$$\Psi(x,r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{S(x,r)} \psi(\xi) d\sigma_\xi = \frac{1}{\omega_n} \int_{S(O,1)} \psi(x+r\eta) d\omega, \tag{14}$$

причем  $\Phi_r(x,0) = 0, \Psi_r(x,0) = 0$ .

Учитывая равенство

$$U_{rr} + \frac{n-1}{r} U_r = r^{-(n-1)} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{n-1} \frac{\partial U}{\partial r} \right)$$

и умножая уравнение (10) на  $r^{n-2}$ , перепишем ее в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^{n-1} \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r^{n-2} U) - \frac{2p}{t} \frac{\partial}{\partial t} (r^{n-2} U) - \lambda^2 (r^{n-2} U) = 0 \quad (15)$$

Пусть  $n = 2k + 1$ . Применяя к уравнению (15) дифференциальный оператор  $\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1}$ , получим

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^k \left( r^{2k} \frac{\partial U}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} (r^{2k-1} U) \right] - \\ & - \frac{2p}{t} \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} (r^{2k-1} U) \right] - \lambda^2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} (r^{2k-1} U) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Имеет место следующая лемма.

**Лемма 1** ([23]). Если  $w(r) \in C^{k+1}$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , то справедливы равенства

$$1. \quad \frac{d^2}{dr^2} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} (r^{2k-1} w) = \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^k \left( r^{2k} \frac{dw}{dr} \right), \quad (17)$$

$$2. \quad \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right)^{k-1} (r^{2k-1} w) = \sum_{j=0}^{k-1} A_j^k r^{j+1} \frac{d^j w}{dr^j}, \quad (18)$$

где  $A_j^k = const$ , причем  $A_0^k = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2k - 1) = (2k - 1)!!$ .

Эту лемму можно доказать методом математической индукции.

Введя обозначение

$$V(x, r, t) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} (r^{2k-1} U), \quad (19)$$

и учитывая лемму 1, относительно функции  $V(x, r, t)$  получим задачу нахождения решения уравнения

$$V_{rr} - V_{tt} - \frac{2p}{t} V_t - \lambda^2 V = 0, \quad (20)$$

удовлетворяющего начальным

$$V(x, r, 0) = f(x, r), \quad x \in R^n, \quad r > 0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} t^{2p} V_t(x, r, t) = g(x, r), \quad x \in R^n, \quad r > 0 \quad (21)$$

и граничным условиям

$$V(x, 0, t) = 0, \quad x \in R^n, \quad t > 0, \quad (22)$$

где

$$f(x, r) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \left( r^{2k-1} \Phi(x, r) \right), \quad (23)$$

$$g(x, r) = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right)^{k-1} \left( r^{2k-1} \Psi(x, r) \right). \quad (24)$$

В работе [14] задача {(20), (21)} решена при  $-\infty < r < \infty, t > 0$ . Чтобы применить данное решение, учитывая условие (22), продолжим нечетным образом начальные данные  $f(x, r)$  и  $g(x, r)$  на интервал  $-\infty < r < 0$  и продолженные функции обозначим через  $f_1(x, r)$  и  $g_1(x, r)$  соответственно.

Тогда решение задачи {(20), (21)} имеет вид [14]

$$V(x, r, t) = \gamma_1 \int_{-1}^1 f_1(x, r + t\xi) Q(\xi, t, \lambda, 1-p) d\xi + \gamma_2 t^{1-2p} \int_{-1}^1 g_1(x, r + t\xi) Q(\xi, t, \lambda, p) d\xi, \quad (25)$$

где  $\gamma_1 = \Gamma(p + 1/2) / (\sqrt{\pi} \Gamma(p))$ ,  $\gamma_2 = \Gamma((1/2) - p) / (\sqrt{\pi} \Gamma(1 - p))$ ,  $Q(\xi, t, \lambda, p) = (1 - \xi^2)^{-p} \bar{J}_{-p}(\lambda t \sqrt{1 - \xi^2})$ , причем  $Q(-\xi, t, \lambda, p) = Q(\xi, t, \lambda, p)$ ,  $\bar{J}_\nu(z)$  – функция Бесселя – Клиффорда [14], которая выражается через функции Бесселя  $J_\nu(z)$  по формуле  $\bar{J}_\nu(z) = \Gamma(\nu + 1)(z/2)^{-\nu} J_\nu(z)$ .

Произведя замену переменных интегрирования  $\eta = t\xi$  и учитывая нечетность функций  $f_1(x, r)$  и  $g_1(x, r)$  по переменной  $r$ , после несложных преобразований, равенство (25) перепишем в виде

$$V(x, r, t) = \gamma_1 t^{1-2p} \int_0^t [f_1(x, \eta + r) - f_1(x, \eta - r)] Q_1(\eta, t, \lambda, 1-p) d\eta +$$

$$+ \gamma_2 \int_0^t [g_1(x, \eta + r) - g_1(x, \eta - r)] Q_1(\eta, t; \lambda, p) d\eta \quad (26)$$

где  $Q_1(\eta, t; \lambda, p) = (t^2 - \eta^2)^{-p} \bar{J}_{-p}(\lambda \sqrt{t^2 - \eta^2})$ .

Для нахождения решения задачи Коши {(5), (8)} воспользуемся следующим свойством среднее сферических [22]

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} U(x, r, t) \quad (27)$$

Из (19) в силу (18) имеем

$$U(x, r, t) = \frac{V(x, r, t)}{A_0^k r} - \sum_{j=1}^{k-1} A_j^k r^j \frac{\partial^j U}{\partial r^j} = \frac{V(x, r, t)}{A_0^k r} - O(r)$$

Учитывая это из (27) получим

$$u(x, t) = \lim_{r \rightarrow 0} U(x, r, t) = \frac{1}{A_0^k} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{V(x, r, t)}{r} \quad (28)$$

Применяя правило Лопиталля [24], после несложных вычислений находим

$$u(x, t) = \frac{2\gamma_1}{A_0^k} t^{1-2p} \int_0^t Q_1(\eta, t; \lambda, 1-p) \frac{\partial f(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta + \frac{2\gamma_2}{A_0^k} \int_0^t Q_1(\eta, t; \lambda, p) \frac{\partial g(x, \eta)}{\partial \eta} d\eta \quad (29)$$

Принимая во внимание (23) и (24), соответственно имеем

$$\frac{\partial f(x, \eta)}{\partial \eta} = \eta \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^k (\eta^{2k-1} \Phi(x, \eta)) \quad (30)$$

$$\frac{\partial g(x, \eta)}{\partial \eta} = \eta \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^k (\eta^{2k-1} \Psi(x, \eta)) \quad (31)$$

Имеет место следующая лемма.

**Лемма 2** ([25]). Если  $\lim_{\eta \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^{k-1} T(x, \eta) = 0, k = 1, 2, \dots,$  то имеет место равенство

$$\int_0^t Q_1(\eta, t; \lambda, \beta) \left( \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^k T(x, \eta) \eta d\eta = \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^k \int_0^t Q_1(\eta, t; \lambda, \beta) T(x, \eta) \eta d\eta$$

В силу (18) для функций  $T(x, \eta) = \eta^{2k-1} \Phi(x, \eta)$  и  $T(x, \eta) = \eta^{2k-1} \Psi(x, \eta)$  условия леммы 2 выполняются. Поэтому применяя лемму 2 к равенству (29) с учетом (30) и (31), получим

$$u(x, t) = \frac{2\gamma_1}{A_0^k} t^{1-2p} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^k \int_0^t Q_1(\eta, t; \lambda, 1-p) \eta^{2k} \Phi(x, \eta) d\eta + \frac{2\gamma_2}{A_0^k} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^k \int_0^t Q_1(\eta, t; \lambda, p) \eta^{2k} \Psi(x, \eta) d\eta \tag{32}$$

Далее, учитывая (13) и (14), после несложных преобразований получим

$$u(x, t) = \tilde{\gamma}_1 t^{1-2p} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \int_{|\xi-x|<t} \varphi(\xi) [t^2 - |\xi - x|^2]^{p-1} \bar{J}_{p-1} \left( \lambda \sqrt{t^2 - |\xi - x|^2} \right) d\xi + \tilde{\gamma}_2 \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n-1}{2}} \int_{|\xi-x|<t} \psi(\xi) [t^2 - |\xi - x|^2]^{-p} \bar{J}_{-p} \left( \lambda \sqrt{t^2 - |\xi - x|^2} \right) d\xi, \tag{33}$$

где  $\tilde{\gamma}_1 = \frac{\Gamma(p + (1/2))\Gamma(n/2)}{\pi^{(n+1)/2} (2n+1)!!\Gamma(p)}, \tilde{\gamma}_2 = \frac{\Gamma((1/2) - p)\Gamma(n/2)}{\pi^{(n+1)/2} (2n+1)!!\Gamma(1-p)}$

Если  $\varphi(x), \psi(x) \in C^{[n/2]+2}(R^n)$ , где  $[n/2]$  - означает, целую часть числа  $(n/2)$ , то функция  $u(x, t)$ , определяемая равенством (33), при нечетном  $n \geq 1$  является регулярным решением задачи Коши {(5), (8)}.

При четном  $n = 2k$ , применяя метод спуска Адамара [22, 23], из (33) получим

$$u(x, t) = \tilde{\gamma}_1 t^{1-2p} \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{|\xi-x|<t} \varphi(\xi) [t^2 - |\xi - x|^2]^{p-(1/2)} \bar{J}_{p-(1/2)} \left( \lambda \sqrt{t^2 - |\xi - x|^2} \right) d\xi +$$

$$+ \tilde{\gamma}_2 \left( \frac{1}{t} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{\frac{n}{2}} \int_{|\xi-x|<t} \psi(\xi) \left[ t^2 - |\xi-x|^2 \right]^{(1/2)-p} \bar{J}_{(1/2)-p} \left( \lambda \sqrt{t^2 - |\xi-x|^2} \right) d\xi, \quad (34)$$

где  $\tilde{\gamma}_1 = \Gamma(n/2)/[\pi^{n/2}(2n)!!]$ ,  $\tilde{\gamma}_2 = \Gamma(n/2)/[\pi^{n/2}(2n)!!(1-2p)]$ .

Таким образом, если  $\varphi(x), \psi(x) \in C^{[n/2]+2}(R^n)$ , то функция  $u(x, t)$ , определяемая равенством (34), при четном  $n \geq 2$  является решением уравнения (5), удовлетворяющим начальным условиям (8).

Полученные здесь формулы (33) и (34) совпадают с результатами работы [25-28] в которой задача Коши  $\{(5), (8)\}$  решена с применением операторов дробного порядка Эрдейи-Кобера.

Формула (33) при нечетном  $n \geq 1$ , а формула (34) при четном  $n \geq 2$  получены при условии  $0 < p < (1/2)$ . При остальных значениях параметра  $p$ , решение задачи  $\{(5), (8)\}$  определяется путем аналитического продолжения по параметру  $p$ , решений, определяемые формулами (33) и (34).

### Литература:

1. Эйлер Леонард. Интегральное исчисление. -М.: ГИФМЛ, 1958. т.3. 447 с.
2. Reimann В. Vercuch einer allgemeinen auffassung der integration und differentiation // Gessammelte Mathematische Werke. Leipzig: Teubner, 1876. P.331-334.
3. Poisson S.D. Memoire sur L'integration des equations lineaires aux differences partielles // J.l'Ecole Rog. Politechn, 1823, n.12. P. 215-248.
4. Darboux G. Lecons sur la theorie generale des surfaces et les applications geometriques du calcul infinitesimal. Paris: Gauthier-Villars. 1915. Vol.2.
5. Трикоми Ф. О линейных уравнениях смешанного типа. М.:Л.-Гостезиздат, 1947, 192 с.
6. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
7. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. М.: Наука, 1966. 292 с.
8. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. М.: Наука, 1970. 295 с.
9. Weinstein A. Sur le probleme de Cauchy pour l'equation de Poisson et l'equation des ondes // C.R. Acad. Sci. Pris. 1952. T. 234. P. 2584-2585.
10. Weinstein A. Generalized axially symmetric potential theory // Bull. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 59? N 1. P. 20-38.
11. Weinstein A. On the wave equation and the equation of Euler-Poisson // Wave motion and vibration theory. Proc. Sympos. Appl. Math. N. Y. : McGraw-Hill, 1954. Vol.5. P. 137-147.
12. Weinstein A. The generalized radiation problem and the Euler-Poisson-Darboux equation. // Summa Brasil Math. 1955. Vol. 3. P. 125-147.
13. Weinstein A. On a singular differential operator. //Ibid. 1960. T. 49. P. 359-365.
14. Капилевич М.Б. Об одном уравнении смешанного эллиптико-гиперболического типа.//Математический сборник. 1952. т.30 (72) №1 с. 11-38.
15. Каримов Ш.Т. Задача Коши для многомерного уравнения Эйлера - Пуассона - Дарбу со спектральным параметром. // Труды международной научной конференции "Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики." Ташкент. 2004.т.1 ст.~234 - 235.

16. Young E.C. On a generalized Euler-Poisson-Darboux equation //J. Math. and Mech. 1969. Vol.18, N 12. P.1167-1175.
17. Diaz J.B., Weinberger H.F. A solution of the singular initial value problem for the Euler-Poisson-Darboux equation// Proc. Amer. Math. Soc. 1953. Vol. 4, N 5. P. 703-715.
18. Blum E. K. The Euler-Poisson-Darboux equation in the exceptional cases //Proc. Amer. Math. Soc. 1954. Vol. 5, N 4. P. 511-520.
19. Blum E. K.: A uniqueness theorems for the Euler - Poisson - Darboux equation, Bull.Amer. Math. Soc.Abstract 59-4-350.
20. Bresters D. W. On the Euler - Poisson - Darboux equation. //SIAM J. Math. Anal. 1973. Vol. 4, N 1. P. 31.41.
21. Fox D.W.: The solution and Huygens' principle for a singular Cauchy problem, J.Math.Mech. 8 (1959), 197\_220.
22. Курант Р. Уравнения с частными производными. -М.; Мир, 1964. с. 830.
23. Evans L.C. Partial Differential Equation. AMS, Berkeley, 1997. 664 p.
24. Ильин В.А., Позняк Э.Г., Основы математического анализа, часть I, II, М: “Наука”, 1973.
25. Urinov A.K., Karimov S.T. Solution of the Cauchy Problem for Generalized Euler-Poisson-Darboux Equation by the Method of Fractional Integrals. Progress in Partial Differential Equations. Springer International Publishing, (2013), 321-337.
26. Karimov S.T. The Cauchy Problem for the Iterated Klein–Gordon Equation with the Bessel Operator. Lobachevskii Journal of Mathematics, 41 (5), -2020, pp. 772 – 784.
27. Karimov S.T., Shishkina E.L. Some methods of solution to the Cauchy problem for a inhomogeneous equation of hyperbolic type with a Bessel operator. Journal of Physics: Conference Series, 1203 (1), -2019.
28. Urinov A.K., Karimov S.T. On the Cauchy Problem for the Iterated Generalized Two-axially Symmetric Equation of Hyperbolic Type. Lobachevskii Journal of Mathematics, 41 (1),- 2020, pp. 102 - 110