А.Н. Фозилов,А. Абдуразаков, Г.И. Алимжонова
Ферганский политехнический институт

ПАРЫ ИЗМЕРИМЫХ РАЗБИЕНИЙ И НЕИЗМЕРИМЫЕ РАЗБИЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

Аннотация: В статье рассматриваются пары дискретных измеримых разбиений и неизмеримые разбиения пространства Лебега и показано, что каждому неизмеримому разбиению с точностью изоморфизма соответствует максимальная пара дискетных измеримых разбиений.

Ключевые слова: Пространство Лебега, изоморфизм, измеримые разбиения, неизмеримые разбиения, пары измеримых разбиений.

Annotatsiya: Maqolada Lebeg fazosining diskret o'lchovli parchalanishlar juftliklari va o'lchovsiz parchalanishlar ko'rib chiqildi va har bir o'lchovsiz parchalanishga izomorfizm aniqligida diskret o'lchovli parchalanishlar maksimal juftliklari to'g'ri kelishi ko'rsatilgan.

Kalit so'zlar: Lebeg fazosi, izomorfizm, o'lchovli parchalanishlar, o'lchovsiz parchalanishlar, o'lchovli parchalanishlar juftliklari.

Annotation: The article considers pairs of discrete measurable partitions and immeasurable partitions of Lebesgue space and shows that to each immeasurable partition there corresponds, to the accuracy of isomorphism, a maximal pair of discrete measurable partitions.

Keywords: Lebesgue space, isomorphism, measurable partitions, unmeasurable partitions, pairs of measurable partitions.

Под пространством Лебега мы будем понимать пространство Лебега с σ – конечной мерой, не имеющее точек положительной меры, что не будет оговариваться в дальнейшем.

Пусть (X_1, F_1, m_1) , (X_2, F_2, m_2) -пространства Лебега. Под изоморфизмом T первого пространства на второе мы понимаем взаимно-однозначное и взаимно-измеримое отображение X_1 на X_2 переводящее множество положительной меры в множества положительной меры, а множество меры нуль в множества меры нуль (см. [1]). Изоморфизм пространства на себя называется автоморфизмом. Группу всех автоморфизмов пространства (X, F, m) обозначим через $A(X)$. Пусть ζ разбиение пространства (X, F, m). Обозначим через $\zeta(x)$ элемент разбиения ζ , содержащий точку x. Если $y \quad \zeta(x)$, то будем также писать $x \overset{\zeta}{\longleftrightarrow} y$.

Разбиение пространства Лебега (X, F, m) называется дискретным, если существует не более чем счетная группа G автоморфизмов (X, F, m) , для которой ζ есть разбиение на траектории группы G: $G_x = \{gx : g \quad G\}$. В этом случае мы будем писать $\zeta = \zeta(G)$.

Разбиение ζ называется аппроксимативно конечным, если существует убывающая последовательность, измеримых разбиений $\{\zeta_n\}$ для которой $\zeta = \bigcap_{n=1} \zeta_n$. Если ζ -

некоторое разбиение пространства X, то обозначим через $[\zeta]$ группу всех автоморфизмов, оставляющих неподвижным элементы разбиения ζ :

$$[\zeta]=\{g \quad A(X): gx \quad \zeta(x) \quad \textit{для почти} \quad \textit{всех} \quad x \quad X \}.$$

Дискретное разбиение называется разбиением типа I, если оно измеримо. Дискретное разбиение ζ пространства (X,F,m) называется разбиением типа II **,** если выполнены условия:

1.не существует измеримого ζ -множества положительной меры A для которого разбиение $\zeta\bigcap A$ имеет тип I **.**

2.существует $\sigma-$ конечная $[\zeta]$ - инвариантная мера эквивалентная мере m.

Разбиение ζ типа II называется разбиением типа II_1 ,если существует конечная $[\zeta]$- инвариантная мера , эквивалентная мере m и типа II ,если не существует измеримого ζ - множества положительной меры A для которого разбиение $\zeta\bigcap A$ имеет тип II_1 **.**

Дискретное разбиение ζ называется разбиением типа III , если не существует измеримого ζ - множества положительной меры A для которого разбиение $\zeta\bigcap A$ имеет тип I или II .

Для дискретного разбиение ζ типа II пространства (X,F,m) обозначим через m^{ζ} инвариантную меру относительно группы $[\zeta]$. В этом случае, когда разбиение ζ имеет тип II_1, мера m^{ζ} предполагается вероятностной.

Для дискретного разбиения ζ пространства (X,F,m) определим пространства $\left(R_{\zeta}, \quad F_{\zeta}, \quad \mu\right)$, где $R_{\zeta} \quad X \quad X: \ (x,y) \quad R_{\zeta} \qquad x \xleftarrow{\zeta}\!\!\rightarrow y$

$\sigma-$ алгебра измеримых множеств F_{ζ} есть наименьшая $\sigma-$ алгебра , содержащая множества вида $\{(x,gx): \ x \quad B\}, \quad g \quad [\zeta], \quad B \quad F$.

Для множества $A \quad F_{\zeta}$, $\qquad \mu(A)=\int_X \left|A\bigcap\left(\{x\} \quad X\right)\right| dm$,

где $|A|$ - число точек множества А.

Множество R_{ζ} называется отношением эквивалентности разбиения ζ , а пространство $\left(R_{\zeta}, \quad F_{\zeta}, \quad \mu\right)$ называется измеримым отношением эквивалентности.

Пусть ξ_1 и ξ_2 -два разбиения пространства X . Через $\xi_1 \smile \xi_2$ обозначается разбиение , определяемое следующим образом: две точки x, y принадлежат одному элементу $\xi_1 \smile \xi_2$ и том и только в том случае , когда существует конечная последовательность

$x, x_1, x_2, ..., x_n, y$,для которых каждые две соседние точки принадлежат одному элементу ξ_1 или ξ_2.

Пару дискретных измеримых разбиений $\{\xi_1, \xi_2\}$ пространства (X, F, m) будем называть аппроксимативно конечной, если разбиение $\xi_1 \breve{}\ \xi_2 / \xi_2$ аппроксимативно конечное. Тип разбиения $\xi_1 \breve{}\ \xi_2 / \xi_2$ называется типом пары $\{\xi_1, \xi_2\}$. Если ξ - измеримое разбиение пространства (X, F, m) , то m_ξ фактор-мера пространства X/ξ . Через H_ξ обозначается естественный гомоморфизм X на X/ξ.

Пусть $\{\xi_1, \xi_2, X\}$ - пара дискретных измеримых разбиений, определенных в пространстве (X, F, m) . Всюду на протяжении этой работы для пары $\{\xi_1, \xi_2, X\}$ будет предполагаться выполненным условие $\xi_1 \quad \xi_2 = \varepsilon$. Пары разбиений $\{\xi_1 , \xi_2 , X \}$ и $\{\xi_1 \ , \xi_2 \ , X \ \}$ называются изоморфными, если существует изоморфизм пространства $(X \ , F \ , m \ )$ на $(X \ , F \ , m \ )$ переводящий разбиение ξ_1 в ξ_1 , а ξ_2 в ξ_2 .

Пусть A измеримое множество пространства (X, F, m) и $mA > 0$. Пару разбиений $\{\xi_1 \cap A, \xi_2 \cap A, A\}$ назовем частью пары $\{\xi_1, \xi_2, X\}$, если выполнены условия:

а) каждый элемент ξ_1 и каждый элемент ξ_2 имеют непустое пересечение с множеством A;

б) $(\xi_1 \breve{}\ \xi_2) \cap A = (\xi_1 \cap A) \breve{}\ (\xi_2 \cap A)$.

Пару дискретных измеримых разбиений $\{\xi_1, \xi_2, X\}$ будем называть расширением пары $\{\xi_1 , \xi_2 , X \}$, если пара $\{\xi_1 , \xi_2 , X \}$ изоморфна некоторой части пары $\{\xi_1, \xi_2, X\}$. Пару дискретных измеримых разбиений назовем максимальной, если она не имеет не изоморфных с ней расширений.

Мы определим конструкцию, посредством которой будут построены примеры максимальных пар дискретных измеримых разбиений и покажем , что всякая максимальная пара с точностью до изоморфизма может быть получены посредством этой конструкции (см. также [4-7])

Пусть ζ - дискретное разбиение пространства (X, F, m) (не обязательно измеримое). В пространстве $(R_\zeta, \ F_\zeta, \ \mu)$ определим для каждого $y \quad X$ множестве $L_y = \{(x, y): \ x \quad \zeta(y)\}$ и обозначим через $\eta_1(\zeta)$ разбиение R_ζ на множества L_y , $y \quad X$. Определим для каждого $x \quad X$ множество $Z_x = \{(x, y): \ y \quad \zeta(x)\}$ и обозначим $\eta_2(\zeta)$ разбиение R_ζ на множества Z_x , $x \quad X$. Пусть M -множество положительной меры пространства (X, F, m) . Определим подпространство пространства $(R_\zeta, \ F_\zeta, \ \mu)$:

$R_{\zeta,M} = R^X_{\zeta,M} = \{(x,y) \quad R_\zeta : \quad y \quad M \quad \}$

и пару разбиений

$$\eta_1(\zeta,M) = \eta_1(\zeta) \cap R_{\zeta,M}, \quad \eta_2(\zeta,M) = \eta_2(\zeta) \cap R_{\zeta,M}$$

Элементами разбиения $\eta_1(\zeta,M)$ служат элементы разбиения $\eta_1(\zeta)$, которые лежат в пространстве $R_{\zeta,M}$, а элементами разбиения $\eta_2(\zeta,M)$ являются множества

$$Z_{x,M} = \{(x,y): \quad y \quad \zeta(x) \cap M\}.$$

Пусть $\alpha = \{M_1, \quad M_2, \quad ..., \quad M_n, \quad ...\}$ - конечная или счетная последовательность множеств положительной меры пространства (X,F,m), причем некоторые из них могут совпадать. Рассмотрим пространство $(X \quad N, m \quad l)$, где N- множество натуральных чисел, а l -считающая мера. Обозначим через $\zeta^{(n)}$ разбиение пространств $X^{(n)} = X \quad \{n\}$ элементами которого служат множеств $\zeta(x) \quad \{n\}$ и пусть

$$M_n^* = M_n \quad \{n\}, \qquad\qquad R_{\zeta,\alpha} = \bigcup_n R^{X^{(n)}}_{\zeta^{(n)},M_n^*}.$$

Измеримые множества и мера в пространстве $R_{\zeta,\alpha}$ определяются естественным образом. Обозначим через $\eta_1(\zeta,\alpha)$ разбиение пространства $R_{\zeta,\alpha}$ элементами, которых служат элементы разбиений $\eta_1(\zeta^n, M_n^*)$, а через $\eta_2(\zeta,\alpha)$ разбиение, элементами которого являются множества

$$\bigcup_n \{((x,n),(y,n)): \quad y \quad \zeta(x) \cap M_n \quad \}.$$

Нетрудно видеть, что пара разбиений $\{\eta_1(\zeta,\alpha), \quad \eta_2(\zeta,\alpha) \quad R_{\zeta,\alpha}\}$ удовлетворяет следующим условиям:

в) любой элемент $\eta_1(\zeta,\alpha)$ и любой элемент $\eta_2(\zeta,\alpha)$, содержащиеся в одном элементе разбиения $\eta_1(\zeta,\alpha) \smile \eta_2(\zeta,\alpha)$ имеют непустое пересечение.

г) $X^{(n)} = X \quad \{n\}$ является максимальным однослойным множеством относительно $\eta_2(\zeta,\alpha)$, $\bigcup_n M_n^*$ является максимальным однослойным множеством относительно $\eta_1(\zeta,\alpha)$.

Л е м м а 1. Пусть для каждого i задана последовательность непересекающихся множеств

$$M_n^i \quad F \qquad, \; M_n^i \cap M_n^j = \quad при \quad i \quad j \quad и \quad M_n = \bigcup_i M_n^i \quad, \quad \alpha = \{M_n \quad \}$$

и пусть $\alpha = \{B_k\}$ образована из множеств M_n^i, занумерованных в одну последовательность. Тогда для произвольного дискретного разбиения ζ пары

$\{\eta_1(\zeta,\alpha),\ \ \eta_2(\zeta,\alpha)\ \ \ R_{\zeta,\alpha}\}$ и $\{\eta_1(\zeta,\alpha),\ \ \eta_2(\zeta,\alpha)\ \ \ R_{\zeta,\alpha}\}$ изоморфны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим отображение T пространства $R_{\zeta,\alpha}$ на пространство $R_{\zeta,\alpha}$:

для $((x,k),(y,k))\ \ \ R_{\zeta^{(k)},B_k\ \ \{k\}},\ \ B_k\ \ \ M_n$

$$T((x,k),(y,k)) = ((x,n),(y,n))\ \ \ R_{\zeta^{(n)},M_n\ \ \{n\}}$$

Отображение T есть изоморфизм, переводящий пару $\{\eta_1(\zeta,\alpha),\eta_2(\zeta,\alpha)\}$ в пару $\{\eta_1(\zeta,\alpha),\eta_2(\zeta,\alpha)\}$. Лемма доказана.

Л е м м а 2. Пара разбиений $\{\eta_1(\zeta,\alpha),\ \ \eta_2(\zeta,\alpha)\ \ \ R_{\zeta,\alpha}\}$ максимальна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть пара разбиений $\{\eta_1,\eta_2,X\}$ является расширением пары $\{\eta_1(\zeta,\alpha),\ \ \eta_2(\zeta,\alpha)\ \ \ R_{\zeta,\alpha}\}$ т.е. существует изоморфизм S такой ,что $SR_{\zeta,\alpha}\ \ \ X$ и выполнены условия $S\eta_1(\zeta,\alpha) = \eta_1 \cap SR_{\zeta,\alpha}$, $S\eta_2(\zeta,\alpha) = \eta_2 \cap SR_{\zeta,\alpha}$,

$$S\eta_1(\zeta,\alpha)\,\breve{}\,S\eta_2(\zeta,\alpha) = (\eta_1\,\breve{}\,\eta_2)\cap SR_{\zeta,\alpha}\quad,\quad \eta_1(x)\cap SR_{\zeta,\alpha}\qquad,\quad \eta_2(x)\cap SR_{\zeta,\alpha}$$

для любого $x\ \ \ X$.

Обозначим через $C_1(C_2)$ элемент разбиения $\eta_1(\zeta,\alpha)$ ($\eta_2(\zeta,\alpha)$), а через $C_1(C_2)$ элемент разбиения η_1 (η_2) , для которых $SC_1\ \ \ C_1$ ($SC_2\ \ \ C_2$). Верно следующее утверждение: $C_1 \cap C_2 =$ тогда и только тогда , когда $C_1 \cap C_2 =$. Действительно , пусть $C_1 \cap C_2$,то есть имеется точка $x\ \ \ C_1 \cap C_2$. Тогда

$$SC_1 = C_1 \cap SR_{\zeta,\alpha}\quad (\eta_1\,\breve{}\,\eta_2)(x)\cap SR_{\zeta,\alpha},$$

$$SC_2 = C_2 \cap SR_{\zeta,\alpha}\quad (\eta_1\,\breve{}\,\eta_2)(x)\cap SR_{\zeta,\alpha}$$

Но

$$(\eta_1\,\breve{}\,\eta_2)(x)\cap SR_{\zeta,\alpha} = (S\eta_1(\zeta,\alpha)\,\breve{}\,S\eta_2(\zeta,\alpha))(x)$$

для некоторого элемента $x\ \ \ SR_{\zeta,\alpha}$. Из этих соотношений вытекает, что

$$SC_1\quad (S\eta_1(\zeta,\alpha)\,\breve{}\,S\eta_2(\zeta,\alpha))(x) = S(\eta_1(\zeta,\alpha)\,\breve{}\,\eta_2(\zeta,\alpha))(x)$$

$$SC_2 \quad (S\eta_1(\zeta,\alpha) \smile S\eta_2(\zeta,\alpha))(x\ ) = S(\eta_1(\zeta,\alpha) \smile \eta_2(\zeta,\alpha))(x\ )$$

и

$$C_1 \quad (\eta_1(\zeta,\alpha) \smile \eta_2(\zeta,\alpha))(S^{-1}x\ ),$$

$$C_2 \quad (\eta_1(\zeta,\alpha) \smile \eta_2(\zeta,\alpha))(S^{-1}x\ )$$

Отсюда и из условия в) следует, что $C_1 \cap C_2$. Обратное утверждение очевидно.

Пусть $x \quad X$. Так как $\eta_1(x) \cap \eta_2(x)$ содержит только одну точку x и, как следует из только что доказанного $\eta_1(x) \cap \eta_2(x) \cap R_{\zeta,\alpha}$ не пусто , то $x \quad SR_{\zeta,\alpha}$. Таким образом $X \ = SR_{\zeta,\alpha}$, откуда и следует утверждение леммы.

Класс максимальных пар, построенных посредством описанной выше конструкции обозначим через $\tilde{M}$.

Пусть $\{\xi_1, \xi_2, X\}$ пара дискретных измеримых разбиений пространства (X, F, m) **.** Пусть $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ непересекающиеся однослойные множества относительно разбиения ξ_2 , сумма которых равна X и $A_n^{\ 1}, A_n^{\ 2}, ..., A_n^{\ k}, ...$ непересекающиеся однослойные множества относительно разбиения $\xi_1 \cap A_n \quad A_n$. Занумеруем все множества $A_n^{\ k}$ в единую последовательность $A^1, A^2, ..., A^2, ...$ и определим множества

$$K_1 = A^1 \quad , \quad K_n = A^n \setminus \bigcup_{j=1}^{n-1} \xi_1(K_j) \quad , \quad n = 2, 3, ...$$

$$M_n = \xi_2(K_n) / \xi_2 \ .$$

Пусть $\alpha = \{M_1, \quad M_2, \quad ..., \quad M_n, \quad ...\}$ назовем фундаментальной последовательностью пары разбиений $\{\xi_1, \xi_2, X\}$.

Л е м м а 3. Всякая пара дискретных измеримых разбиений имеет максимальное расширение принадлежащее классу $\tilde{M}$.

Д ок а з а т ел ь с т в о. Пусть $\zeta = \xi_1 \smile \xi_2 / \xi_2$ и $\alpha = \{M_n\}$ - фундаментальная последовательность пары $\{\xi_1, \xi_2, X\}$. Построим пару разбиений $\{\eta_1(\zeta,\alpha), \quad \eta_2(\zeta,\alpha) \quad R_{\zeta,\alpha}\}$ и покажем , что эта пара является расширением пары $\{\xi_1, \xi_2, X\}$. Определим отображение S пространства X в пространство $R_{\zeta,\alpha}$ следующим образом. Для $x \quad \xi_1(K_j)$

$$Sx = ((H_{\xi_2}(x), n), (H_{\xi_2}(\xi_1(x) \cap K_n), n) \quad R_{\zeta^{(n)}, M_n^*} \ .$$

Отображение S взаимно-однозначно и

$$S\xi_1 = \eta_1(\zeta,\alpha) \bigcap SX \quad , \qquad S\xi_2 = \eta_2(\zeta,\alpha) \bigcap SX \ .$$

Непосредственно видно, что множество $A \quad X$ есть измеримое ξ_1 - множество (ξ_2 - множество) тогда и только тогда , когда SA есть пересечение с SX измеримого $\eta_1(\zeta,\alpha)$ - множества ($\eta_2(\zeta,\alpha)$ - множества). Поэтому $A \quad X$ измеримо тогда и только тогда, когда SA есть пересечение с SX измеримого в $R_{\zeta,\alpha}$ множества. При этом A есть множества меры нуль тогда и только тогда, когда SA есть пересечение с SX множества меры нуль. Поэтому S есть взаимно-однозначное и взаимно - измеримое отображение пространства Лебега X на сепарабельное пространство SX, для которого прообраз множества меры нуль есть множество меры нуль. Отсюда (см. [2], §2, п^0 4) следует, что подпространство SX есть пространство Лебега, а S есть изоморфизм. Поэтому SX является измеримым множеством пространства $R_{\zeta,\alpha}$. Легко проверить, что $\{S\xi_1, S\xi_2, SX\}$ часть пары $\{\eta_1(\zeta,\alpha), \ \ \eta_2(\zeta,\alpha) \quad R_{\zeta,\alpha}\}$. В силу леммы 2. пара разбиений $\{\eta_1(\zeta,\alpha), \ \ \eta_2(\zeta,\alpha) \quad R_{\zeta,\alpha}\}$ есть максимальное расширение пары $\{\xi_1,\xi_2,X\}$.

Л е м м а 4. Всякая максимальная пара изоморфна некоторой паре из класса $\tilde{M}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ максимальная пара дискретных измеримых разбиений. Из леммы 3. следует, что пара $\{\xi_1,\xi_2,X\}$, имеет максимальное расширение $\{\eta_1,\eta_2,X\}$ из класса $\tilde{M}$. Но в силу определения максимальности, пара не имеет неизоморфных с ней расширений. Отсюда следует, что пары $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ и $\{\eta_1,\eta_2,X\}$ изоморфны. Лемма доказана.

Пусть пары разбиений $\left\{\xi_1 \ ,\xi_2 \ ,X \ \right\}$ и $\left\{\xi_1 \ \ ,\xi_2 \ \ ,X \ \right\}$ являются расширениями пары разбиений $\{\xi_1,\xi_2,X\}$. Изоморфизм T пары $\left\{\xi_1 \ ,\xi_2 \ ,X \ \right\}$ на пару $\left\{\xi_1 \ \ ,\xi_2 \ \ ,X \ \right\}$ назовем оставляющим инвариантной пару разбиений $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ если существуют изоморфизмы S_1 , S_2 переводящее $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ в части пар $\left\{\xi_1 \ ,\xi_2 \ ,X \ \right\}$ и $\left\{\xi_1 \ \ ,\xi_2 \ \ ,X \ \right\}$, такие, что для $x \quad X$

$$TS_1\xi_1(x) = S_2\xi_1(x) \ \ , \quad TS_1\xi_2(x) = S_2\xi_2(x) \ .$$

Т е о р е м а 1. Для всякой пары дискретных измеримых разбиений существует максимальное расширение, единственное с точностью до изоморфизма оставляющего инвариантной данную пару разбиений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы уже доказали, что для всякой пары дискретных измеримых разбиений $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ существует максимальное расширение $\{\eta_1(\zeta,\alpha\,), \ \ \eta_2(\zeta,\alpha\,) \quad R_{\zeta,\alpha}\}$ (см. лемму 3).

Пусть S -изоморфизм, переводящий пару $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ в часть пары $\{\eta_1(\zeta,\alpha), \eta_2(\zeta,\alpha) \; R_{\zeta,\alpha}\}$. Предположим, что существует другое максимальное расширение пары $\{\xi_1,\xi_2,X\}$, которое мы обозначим через $\{\xi_1,\xi_2,X\}$. Тогда существует часть пары $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ - пары $\{\xi_1 \cap A,\xi_2 \cap A, A\}$ и

изоморфизм S_1 такой, что $S_1\{\xi_1,\xi_2,X\}=\{\xi_1\cap A,\xi_2\cap A, A\}$. Определим отображение $T_1(T_2)$ пространства X/ξ_1 (X/ξ_2) на пространство

$R_{\zeta,\alpha}/\eta_1(\zeta,\alpha)$ ($R_{\zeta,\alpha}/\eta_2(\zeta,\alpha)$) следующим образом: элементу $a_1 \quad X/\xi_1$

$(a_2 \quad X/\xi_2)$ сопоставляем $a_1 \quad R_{\zeta,\alpha}/\eta_1(\zeta,\alpha)$ $(a_2 \quad R_{\zeta,\alpha}/\eta_2(\zeta,\alpha))$ такой, что

$T_1a_1=\eta_1(SS_1^{-1}(a_1\cap A))$ $(T_2a_2=\eta_2(SS_1^{-1}(a_2\cap A))$.

Очевидно, что T_1, T_2 являются изоморфизмами.

Теперь покажем, что для $a_1 \quad \xi_1$, $a_2 \quad \xi_2$ верно следующее утверждение : $a_1 \cap a_2$ тогда и только тогда, когда $T_1a_1 \cap T_2a_2$. Действительно, пусть $x \quad a_1 \cap a_2$. Тогда, обозначим через d_1^x, d_2^x элементы разбиения ξ_1, ξ_2 для которых

$S_1d_1^x \quad \xi_1(x)$, $S_1d_2^x \quad \xi_2(x)$

и

$S_1d_1^x, S_1d_2^x \quad (\xi_1 \smile \xi_2)(x)\cap A$.

Отсюда вытекает, что d_1^x и d_2^x лежат в одном элементе разбиения $\xi_1 \smile \xi_2$ и

$S_1d_1^x, S_1d_2^x \quad (\eta_1(\zeta,\alpha)\smile\eta_2(\zeta,\alpha))(y)\cap SX$,

где $y \quad X$. Поэтому элементы T_1a_1 и T_2a_2 содержится в одном элементе разбиения $\eta_1(\zeta,\alpha)\smile\eta_2(\zeta,\alpha)$. Так как пара разбиений $\{\eta_1(\zeta,\alpha), \eta_2(\zeta,\alpha) \; R_{\zeta,\alpha}\}$ удовлетворяет условию в), то $T_1a_1 \cap T_2a_2$. Обратное доказывается аналогично с учетом того, что пара $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ удовлетворяет условию в).

Из доказанного следует, что отображение T пространства X на простраство $R_{\zeta,\alpha}$:

$Tx = T_1\xi_1(x) \cap T_2\xi_2(x)$

Взаимно-однозначно и, как легко проверить, является изоморфизмом, переводящим пару $\left\{\xi_1, \xi_2, X\right\}$ в пару $\left\{\eta_1(\zeta,\alpha), \quad \eta_2(\zeta,\alpha) \quad R_{\zeta,\alpha}\right\}$ оставляющим инвариантной пару $\{\xi_1,\xi_2,X\}$. Теорема доказана.

Обозначим через $G(\xi_1,\xi_2)$ группу всех автоморфизмов, оставляющих неподвижным разбиение ξ_1 и инвариантным разбиение ξ_2.

Т е о р е м а 2. Следующие четыре утверждение для пары дискретных измеримых разбиений $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ эквивалентны:

1) $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ максимальна;
2) любой элемент ξ_1 и любой элемент ξ_2, содержащиеся в одном элементе разбиения $\xi_1 \smile \xi_2$ имеют непустое пересечение;
3) ξ_1 - траекторное разбиение группы $G(\xi_1,\xi_2)$;
4) ξ_2 - траекторное разбиение группы $G(\xi_2,\xi_1)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эквивалентность утверждений 3) и 4) доказана

в работе $[3]$ (В работе $[3]$ пара удовлетворяющая условию 3) названа связанной). Мы начинаем с доказательства утверждений 1) и 2) . Если пара разбиений $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ максимальна, то из леммы 4 следует, что она с точностью до изоморфизма принадлежит классу $\tilde{M}$. Следовательно, пара $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ удовлетворяет условию 2).

Теперь обратно, пусть пара дискретных измеримых разбиений $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ удовлетворяет условию 2). Предположим противное, то есть что пара разбиений $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ не максимальна. Из теоремы 2 существует единственное максимальное расширение $\left\{\xi_1, \xi_2, X\right\}$ этой пары. Пусть $\left\{\xi_1 \cap A, \xi_2 \cap A, A\right\}$ часть пары $\left\{\xi_1, \xi_2, X\right\}$, изоморфная с парой $\{\xi_1,\xi_2,X\}$. Из доказанного следует, что пара $\left\{\xi_1, \xi_2, X\right\}$ удовлетворяет условию 2).

Для $x \quad X \setminus A$ обозначим

$c_1^x = \xi_1(x) \cap A$, $c_2^x = \xi_2(x) \cap A$.

Тогда $c_1^x \quad \xi_1 \cap A$ и $c_2^x \quad \xi_2 \cap A$ содержатся в одном элементе разбиения $\left\{\xi_1 \cap A, \xi_2 \cap A, A\right\}$. Но $c_1^x \cap c_2^x =$, т.е. пара $\left\{\xi_1 \cap A, \xi_2 \cap A, A\right\}$ не удовлетворяет условию

2). Отсюда следует, что пары $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ и $\{\xi_1 \cap A,\xi_2 \cap A,A\}$ не изоморфны. Из полученного противоречия следует, что сделанное предположение неверно, т.е. пара $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ максимальна. Перейдем к доказательству 1)→3). Пусть $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ максимальная пара дискретных измеримых разбиений. Из леммы 4 следует, что существует пар $\{\eta_1(\zeta,\alpha),\ \ \eta_2(\zeta,\alpha)\ \ \ R_{\zeta,\alpha}\}$ из класса $\tilde{M}$ изоморфная с парой $\{\xi_1,\xi_2,X\}$. Пусть T изоморфное отображение пространства $R_{\zeta,\alpha}$, на пространство X переводящее пару $\{\eta_1(\zeta,\alpha),\eta_2(\zeta,\alpha)\}$ в пару $\{\xi_1,\xi_2\}$. Пусть $S\ \ \ G(\eta_1(\zeta,\alpha),\eta_2(\zeta,\alpha))$.

Очевидно, что существует автоморфизм $g\ \ \ [\zeta]$, для которого $S(x,y)=(x,gy)$. Ясно, что траекторное разбиение группы $G(\eta_1(\zeta,\alpha),\eta_2(\zeta,\alpha))$ есть $\eta_1(\zeta,\alpha)$. Обозначим

$$G\ =\{TST^{-1}:S\ \ \ G(\eta_1(\zeta,\alpha),\eta_2(\zeta,\alpha))\}.$$

Очевидно, что $G\ =G(\xi_1,\xi_2)$ и $\zeta(G\ )=\xi_1$. Теперь для полного доказательства теоремы осталось доказать 3)→2). Пусть $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ пара дискретных измеримых разбиений, удовлетворяющая условию 3), т.е. $\xi_1=\zeta(G(\xi_1,\xi_2))$. Пусть $\xi_2(x)$ и $\xi_1(y)$ принадлежат одному элементу разбиения $\xi_1 \smile \xi_2$. Тогда можно без ограничения общности считать, что существует последовательность точек $x,x_1,x_2,...,x_n,y$ таких, что $x \xleftrightarrow{\xi_1} x_1 \xleftrightarrow{\xi_2} x_2 \xleftrightarrow{\xi_1} ... \xleftrightarrow{\xi_1} x_n \xleftrightarrow{\xi_2} y$. Выберем автоморфизм $T_1\ \ \ G(\xi_1,\xi_2)$ такой, что $Tx_1=x$. Тогда $T_1x_2 \xleftrightarrow{\xi_2} x$. Так как $T_1x_2 \xleftrightarrow{\xi_1} x_3$,то существует автоморфизм $T_2\ \ \ G(\xi_1,\xi_2)$ такой, что $T_2x_3=T_1x_2$. Так как $x_4 \xleftrightarrow{\xi_2} x_3$, то $T_2x_4 \xleftrightarrow{\xi_2} T_1x_2 \xleftrightarrow{\xi_2} x$. Продолжая этот процесс, найдем автоморфизм $T\ \ \ G(\xi_1,\xi_2)$, для которого $T\ y \xleftrightarrow{\xi_2} x$ т.е. $\xi_2(x)$ и $\xi_1(y)$ пересекаются.

Теорема 2 доказана.

Из теоремы 1 вытекает, что для каждой пары дискретных измеримых разбиений $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ существует единственная с точностью до изоморфизма по этой паре определяемая совокупность $\{\eta_1(\zeta,\alpha),\ \ \eta_2(\zeta,\alpha)\ \ \ R_{\zeta,\alpha},A\}$, где $\{\eta_1(\zeta,\alpha),\ \ \eta_2(\zeta,\alpha)\ \ \ R_{\zeta,\alpha}\}$ - максимальная пара, а A множество положительной меры пространства для которого

$\{\eta_1(\zeta,\alpha)\cap A,\ \ \eta_2(\zeta,\alpha)\cap A,\ \ A\}$ есть часть пары $\{\eta_1(\zeta,\alpha),\ \ \eta_2(\zeta,\alpha)\ \ \ R_{\zeta,\alpha}\}$ изоморфная $\{\xi_1,\xi_2,X\}$. Пусть $\{\xi_1,\xi_2,X\}$ - максимальная пара дискретных измеримых разбиений. Измеримое множество $A\ \ \ X$ положительной меры назовем допустимым множеством максимальной пары $\{\xi_1,\xi_2,X\}$, если выполняются условия:

1. каждый элемент ξ_1 и каждый элемент ξ_2 имеют непустое пересечение с множеством A;
2. $(\xi_1 \smile \xi_2)\cap A=(\xi_1 \cap A)\smile(\xi_2 \cap A)$

Назовем класс допустимых множеств максимальной пары $\{\xi_1, \xi_2, X\}$ сопряженным классом $K = K\{\xi_1, \xi_2, X\}$ этой пары, если

1. для любых двух множеств A_1, A_2 K существует автоморфизм T пространства X, для которого $T\xi_1 = \xi_1$, $T\xi_2 = \xi_2$, $TA_1 = A_2$
2. K содержит всякий класс допустимых множеств, удовлетворяющий условию 1.

Из теоремы 2 вытекает, что для каждой пары дискретных измеримых разбиений существует единственным образом с точностью до изоморфизма определяемая максимальная пара $\{\xi_1, \xi_2, X\}$ и сопряженный класс K. Совокупность $\{\xi_1, \xi_2, X, K\}$ есть полная система инвариантов пары дискретных измеримых разбиений. Таким образом, задача классификации пар дискретных измеримых разбиений сводится к задаче классификации максимальных пар.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Винокуров В.Г., Ганиходжаев Н.Н. Условные функции в траекторной теории динамических систем. Изв.АН СССР. Сер.мат., 1978, 42, №5, с.428-463.
2. Винокуров В.Г., Рубштейн Б.А., Федоров А.Л. Пространство Лебега и его измеримые разбиения. Типогр. ТашГУ, 1985
3. Винокуров В.Г., Федоров А.Л. Пары измеримых разбиений и алгебра Фон Неймана. Сб. “Предельные теоремы для случайных процессов и смежные вопросы”, Ташкент. “Фан”, 1982, с. 65-72.
4. Винокуров, В. Г., Фозилов, А. Н. (1986). Классификация пар дискретных измеримых разбиений пространства Лебега. Успехи математических наук, 41(2 (248), 185-186.
5. Фозилов А. Н., Абдураззаков А. О КОНСТРУКЦИИ МАКСИМАЛЬНОЙ ПАРЫ ДИСКРЕТНЫХ ИЗМЕРИМЫХ РАЗБИЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА //Научный Фокус. – 2023. – Т. 1. – №. 1. – С. 1448-1452.
6. Fozilov A. N., Makhmudova N. ON THE CLASSIFICATION OF PAIRS OF DISCRETE MEASURABLE PARTITIONS OF TYPE II //International Journal of Advance Scientific Research. – 2022. – Т. 2. – №. 12. – С. 219-226.
7. Фозилов А.Н., Алимжонова Г.И. О конечных последовательностей дискретных измеримых разбиений пространства Лебега. Scientific-technical journal (STJ FerPI, ФарПИ ИТЖ, НТЖ ФерПИ, 2024, Т.28. спец.выпуск №6)