JOURNAL OF IQRO – ЖУРНАЛ ИКРО – IQRO JURNALI – volume 13, issue 01, 2024
ISSN: 2181-4341, IMPACT FACTOR (RESEARCH BIB) – 7,245, SJIF – 5,431

Nurkayev Shuhrat Jurayevich
Turin politexnika universiteti akademik litseyi oliy toifali matematika fani o'qituvchisi.
+998909280195

CHIZIQLI VA CHIZIQLI BO'LMAGAN TENGLAMALARNI BUTUN SONLARDA YECHISH. DIOFANT TENGLAMALARI.

Annotatsiya: Ushbu maqolada Chiziqli va chiziqli bo'lmagan tenglamalarni butun sonlarda yechish. Diofant tenglamalari tushintiriladi.

Kalit so'zlar: Diofant, chiziqli, tenglama, tenglik, sonlar.

Abstract: This article deals with solving linear and non-linear equations in integers. Diophantine equations are explained.

Key words: Diophantus, linear, equation, equality, numbers.

Chiziqli va chiziqli bo'lmagan tenglamalarni butun sonlarda yechish. Diofant tenglamalari.

Diofant tenglamalari *deb, yechimlari butun (ba'zida natural) sonlarda izlanadigan tenglamalarga aytiladi. «Diofant» tenglama qadimgi yunon matematigi Diofant sharafiga nomlangan.*

Masalan, $5x + 4y = 60$ tenglamasi, bu tenglamani qanoatlantiradigan barcha butun x va y qiymatlarini topish talab qilinsa, Diofant tenglamasi bo'ladi.

$\boldsymbol{ax + by = c}$, $\boldsymbol{a, b, c} \in \boldsymbol{Z}, \boldsymbol{a, b} \neq 0$ **ko'rinishdagi tenglamalarni *(x , y)* butun sonlarda yechish.**

Umumiylikni cheklamasdan, $a > 0, b > 0, c \geq 0$ deb hisoblashimiz mumkin. Haqiqatdan, agar $c < 0$ bo'lsa, u holda quyidagi tenglamani qarashga o'tishimiz mumkin

$a(-x) + b(-y) =- c,$

va $-x = x_1, \ - y = y_1, \ - c = c_1$ belgilashlar kiritamiz.

Agarda, masalan $a < 0$ bo'lsa, u holda $x_1 =- x$ deb,

$(-a)x_1 + by = c$ tenglamani hosil qilamiz,

Bu yerda $(-a) > 0$.

Avval $c = 0$ holni qaraylik. Bunda tenglama

$ax + by = 0$ (1)

ko'rinishga ega bo'ladi.

$d = EKUB(a, b)$ bo'lsin, ya'ni $a = a_1d$; $b = b_1d$, bu yerda EKUB$(a_1, b_1) = 1$. (bunday a_1, b_1 butun sonlar o'zaro tub sonlar deyiladi).

$a_1dx + b_1dy = 0$ tenglamaning ikkala tomonini *d* ga bo'lib, quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$a_1x + b_1y = 0$, (2)

Bundan *x* soni b_1 ga, *y* soni esa a_1 ga bo'linishi kelib chiqadi.

$x = b_1t, t \in Z$ belgilash kiritib, (2) tenglikdan $y =- a_1t$ ni hosil qilamiz.

Shu bilan birga, barcha bunday *(x, y)* juftliklar (2) tenglamani qanoatlantiradi. Shuning uchun (1) tenglamaning barcha yechimlari quyidagi formula beriladi:

$$\begin{cases} x = b_1t \\ y =- a_1t \end{cases}$$

bu yerda $t \in Z, a_1 = \frac{a}{НОД(a,b)}$, $b_1 = \frac{b}{НОД(a,b)}$.

Endi umumiy holni qaraylik

$ax + by = c$, (3)

bu yerda $a > 0, b > 0, c > 0$.

$d = EKUB(a, b)$ bo'lsin. Agar *c* o'ng tomoni *d* ga bo'linmasa, u holda (3) tenglik mavjud emas, chunki uning chap tomoni har qanday *x,y* ∈ *Z* uchun *d* ga bo'linadi.

Agarda *c* *d* bo'linsa, ya'ni $a = a_1d$; $b = b_1d$, $c = c_1d$, bu yerda a_1, b_1, c_1 – biror natural sonlar va EKUB $(a_1, b_1) = 1$ bo'lsa, u holda (3) tenglamaning har bir hadini *d* ga qisqartirsak, u quyidagi ko'rinishga keladi:

$a_1x + b_1y = c_1$. (4)

EKUB$(a_1, b_1) = 1$ bo'lsa, u holda Yevklid algoritmiga ko'ra shunday *m* va *n* butun sonlari topiladiki,

$a_1m + b_1n = 1$. (5) bo'ladi.

(5) tenglikning har bir hadini $c_1$ga ko'paytirib, quyidagini hosil qilamiz: $a_1(c_1m) + b_1(c_1n) = c_1$. (6)

$x_0 = c_1m$; $y_0 = c_1n$ belgilab olamiz. U holda (x_0, y_0) sonlar juftligi dastlabki (3) tenglamaning yechimi hisoblanadi.

ISSN: 2181-4341, IMPACT FACTOR (RESEARCH BIB) – 7,245, SJIF – 5,431

Agar (x, y) – (3) tenglamaning ixtiyoriy yechimi bo‘lsa, u holda $a_1x + b_1y = c_1$ tenglikdan (6) tenglikni hadma-had ayirib, quyidagi munosabatni olamiz

$a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) = 0.$ (7)

Aksincha, agar $x - x_0$ va $y - y_0$ sonlari (7) tenglamani qanoatlantirsa, u holda *(x,y)* juftligi (4) tenglikni qanoatlantiradi. Yuqorida (7) ko‘rinishdagi tenglamaning barcha yechimlari

$$\begin{cases} x - x_0 = -b_1t \\ y - y_0 = a_1t \end{cases}$$

formula bilan berilishi mumkinligi ko‘rsatilgan, bu yerda $t \in Z$.

Shunday qilib, (3) tenglamaning barcha yechimlari quyidagi formulalar bo‘yicha topiladi:

$$\begin{cases} x = x_0 - b_1t \\ y = y_0 + a_1t \end{cases} (8)$$

bu yerda $t \in Z$.

Misol 1. $16x + 20y = 14$ tenglamaning barcha butun yechimlarini toping.

Yechish.

EKUB(16,20) = 4 hamda 14 soni 4 ga bo‘linmagani uchun berilgan tenglama butun yechimlarga ega emas.

Misol 2. $5x + 7y = 6$ tenglamaning barcha butun yechimlarini toping.

Yechish.

Bu yerda EKUB(5,7) = 1, shuning uchun tenglamaning yechimlarini topish uchun yuqoridagi sxemani qo‘llaymiz.

Avval $5a + 7b = 1$ ko‘rinishni qarab chiqamiz. Buning uchun Yevklid algoritmidan foydalanamiz:

$$7 = 5 \cdot 1 + 2$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1$$

$$2 = 2 \cdot 1 + 0$$

U holda $1 = 5 - 2 \cdot 2 = 5 - 2(7 - 5) = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7$, ya’ni $a = 3;\ b = -2$.

Endi $1 = 5a + 7b$ tenglikning har bir hadini 6 ga ko‘paytirib, $6 = 5 \cdot (18) + 7 \cdot (-12)$ ni hosil qilamiz. Shunday qilib, (18; -12) juftlik – $5x + 7y = 6$ tenglamaning butun yechimlari bo‘ladi. U holda (8) formulaga ko‘ra tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\begin{cases} x = 18 - 7t, \\ y = -12 + 5t \end{cases}$$

bu yerda $t \epsilon Z$.

$\boldsymbol{ax^2 + bxy + cy^2 = d}$**, bu yerda** $\boldsymbol{a, b, c, d} \in \boldsymbol{Z}$**,** $\boldsymbol{a} \neq 0$ **ko'rinishdagi tenglamalarni *(x , y)* butun sonlarda yechish.**

$ax^2 + bxy + cy^2 = d.$ (9)

tenglamani qaraylik.

$D = b^2 - 4ac$ belgilab, ikkita holni qarab chiqamiz.

A holi:

$D \geq 0$ va $\sqrt{D} \epsilon Z$ bo'lsin. Bu holda $t_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$, $t_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ – ratsional sonlar, $a \neq 0$ va $ax^2 + bxy + cy^2 = a(x - t_1y)(x - t_2y)$ (mustaqil tekshiring!).

U holda (9) tenglamani quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin:

$(2ax - 2at_1y)(2ax - 2at_2y) = 4ad \Leftrightarrow (a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y) = d_1$, bu yerda $a_1 = 2a;\ b_1 =- 2at_1;\ a_2 = 2a;\ b_2 =- 2at_2;\ d_1 = 4ad$ – butun sonlar.

Barcha almashtirishlar $a \neq 0$ sharti bilan amalga oshirilganligini ta'kidlab o'tamiz. (9) tenglama uchun shunga o'xshash ko'rinishni $c \neq 0$ bo'lganda hosil qilish mumkin.

Endi quyidagi tenglamani qaraylik:

$(a_1x + b_1y)(a_2x + b_2y) = d_1$, (10)

bu yerda $a_1, b_1,\ a_2,\ b_2,\ d_1 \epsilon Z;\ x, y \epsilon Z$.

Agar EKUB (a_1, b_1) d_1 ning bo'luvchisi hisoblanmasa, u holda (10) tenglama butun sonlarda yechimga ega bo'lmaydi.

Agarda d_1 EKUB (a_1, b_1) ga bo'linsa, u holda (10) tenglamaning ikkala tomonini d_1 ga qisqartiramiz.

Shunga o'xshash almashtirishlarni EKUB(a_2, b_2) uchun amalga oshiramiz (agar d_1 EKUB(a_2, b_2) ga bo'linmasa, u holda (10) tenglama yechimga ega bo'lmaydi).

Endi EKUB(a_1, b_1) = EKUB$(a_2, b_2) = 1$ deb hisoblaymiz.

(10) tenglamadan $a_1x + b_1y$ va $a_2x + b_2y$ lar ko'paytmasi d_1 soniga teng bo'lgan butun ko'paytuvchilar hisoblanadi.

$d_1 s$oni $d_1 = c_1c_2$ yoyilmasining ikkita butun ko'paytuvchlar ko'paytmasining barcha mumkin bo'lgan hollarini qarab chiqish hamda har bir shunday yoyilma uchun

$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, (11)

sistemani (x, y) butun sonlarda yechish qoldi.

d_1 sonining $d_1 = c_1c_2$, bu yerda $c_1, c_2 \in Z$ shakldagi turli xil ko‘rinishlari faqat chekli sonda mavjud bo‘lganligi sababli, masala har biri chiziqli bo‘lgan (11) ko‘rinishdagi chekli sistemalar yig‘indisiga keltiriladi,

Misol 3. *$55x^2 - 12xy - 91y^2 = 59$*

tenglamani *(x, y)* butun sonlarda yeching.

Yechish.

Masalan, ***x*** o‘zgaruvchiga nisbatan $55x^2 - 12xy - 91y^2 = 0$ kvadrat tenglamani yechib, uning chap qismini chiziqli ko‘paytuvchilarga ajratish mumkin:

$$(5x - 7y)(11x + 13y) = 59.$$

59 sonini ikkita butun ko‘paytuvchilar ko‘rinishida faqat quyidagi hollardagina tasvirlash mumkin:

$$59 = 59 \cdot 1 = 1 \cdot 59 = (-59) \cdot (-1) = (-1) \cdot (-59).$$

Mos ravishda 4 ta chiziqli tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} 5x - 7y = 59 \\ 11x + 13y = 1 \end{cases}; \begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ 11x + 13y = 59 \end{cases}; \begin{cases} 5x - 7y = -59 \\ 11x + 13y = -1 \end{cases}; \begin{cases} 5x - 7y = -1 \\ 11x + 13y = -59 \end{cases}.$$

Butun sonli yechimlarni tanlab hamda ushbu to‘rta tenglamalar sistemasini yechib, quyidagi javobni hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}; \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}.$$

B holi:

$ax^2 + bxy + cy^2 = d$ tenglamani $a, b, c, d \in Z$ va $D = b^2 - 4ac < 0$ da

qaraylik.

Chap tomonida to‘la kvadratni ajratib, quyidagini hosil qilamiz:

$(2ax + by)^2 + (4ac - b^2)y^2 = 4ad$ (12)

(12) tenglamaning chap qismidagi ikkala qo‘shiluvchi ham manfiymas, demak, agar $ad < 0$ bo‘lsa, u holda (12) tenglama yechimlarga ega bo‘lmaydi. Agarda $ad \geq 0$ bo‘lsa, u holda quyidagi tengsizliklar sistemasi o‘rinli bo‘lishi kerak:

$$\begin{cases}(2ax+by)^2 \le 4ad \\ (4ac-b^2)y^2 \le 4ad\end{cases} \Rightarrow \ |y| \le 2\sqrt{\frac{ad}{4ac-b^2}} \ (13)$$

(13) tengsizliklar sistemasini qanoatlantiradigan y butun sonlarining faqat chekli sonigina mavjud. y_0 –shunday sonlardan biri bo‘lsin. y_0 ni sistemaning birinchi tengsizligiga qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$(2ax+by_0)^2 \le 4ad \ \Leftrightarrow \ -2\sqrt{ad} \le 2ax+by_0 \le 2\sqrt{ad} \ \Leftrightarrow \ -2\sqrt{ad}-by_0 \le 2ax \le -by_0 + 2\sqrt{ad}$ (14)

O‘z navbatida, (14) ni qanoatlantiruvchi x butun sonlarning faqat cheklangan soni mavjud.

Bunday (x, y_0) barcha juftliklarni hisobga olib, B - holi uchun (9) tenglamaning barcha mumkin bo‘lgan yechimlarini yozamiz. Olingan juftliklarni dastlabki tenglamaga qo‘yib, uni qanoatlantiradiganlarini tanlaymiz.

Misol 4. $x^2-2xy+2y^2=9$ tenglamani qanoatlantiruvchi barcha (x, y) butun sonli juftliklarni toping.

Yechish.

Berilgan tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$(x-y)^2+y^2=9.$

Demak,

$$\begin{cases}(x-y)^2 \le 9 \\ y^2 \le 9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x-y| \le 3 \\ |y| \le 3\end{cases}$$

tengsizliklar sistemasi o‘rinli bo‘ladi.

$|y| \le 3$ tengsizlikdan butun y larning barcha mumkin bo‘lgan qiymatlarini topamiz:

$$y=-3,\ -2,\ -1, 0, 1, 2, 3.$$

Bunday holda, $|x-y| \le 3$ tengsizlikni yechmasdan, y ning topilgan qiymatlarini dastlabki tenglamaga qo‘yish va uni x ga nisbatan yechish osonroq bo‘ladi. U holda quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases}x=-3 \\ y=-3\end{cases}; \ \begin{cases}x=\pm 2 \pm \sqrt{5} \\ y=\pm 2\end{cases}; \ \begin{cases}x=\pm 1 \pm \sqrt{8} \\ y=\pm 1\end{cases}; \ \begin{cases}x=\pm 3 \\ y=0\end{cases}$$

Butun sonlardagi javobi quyidagicha: $\begin{cases}x=-3 \\ y=-3\end{cases}; \ \begin{cases}x=-3 \\ y=0\end{cases}; \ \begin{cases}x=3 \\ y=0\end{cases}.$

Eslatma: $D > 0$ va $\sqrt{D} \notin Z$ hollari murakkabroq va alohida ko‘rib chiqishni talab qiladi.

Butun o‘zgaruvchili tenglamalarni yechishda ko‘p hollarda bunday masalalarni chekli sonli mumkin bo‘lgan variantlarni tanlashga keltirish mumkinligini ham hisobga olish maqsadga muvofiqdir.

Masalan, masalani yechish jarayonida izlanayotgan butun sonli o‘zgaruvchisi faqat biror (a, b) oraliqda o‘zgarishi mumkinligini aniqlash mumkin bo‘lsa, u holda ushbu oraliqqa tegishli barcha butun sonlarning chekli to‘plamini sanab o‘tish kifoya.

Misol 5. $x^2 - y^2 = 2007$ tenglamani natural sonlarda yeching.

Yechish. $x^2 - y^2 = 2007$ $\quad x^2 - y^2 = 3\ 3\ 223$ $\quad (x-y)(x+y) = 3\ 3\ 223$.

$x, y \quad N$ bo‘lgani uchun $x + y > x - y$, $x + y \quad N$ va $x - y \quad N$ bo‘ladi. Shuning uchun oxirgi tenglama quyidagi uchta tenglamalar sistemasining birlashmasiga teng kuchli bo‘ladi:

a) $\begin{matrix} x - y = 1, \\ x + y = 2007; \end{matrix}$ b) $\begin{matrix} x - y = 3, \\ x + y = 669; \end{matrix}$ d) $\begin{matrix} x - y = 9, \\ x + y = 223. \end{matrix}$

Har bir sistemani alohida yechib olamiz:

a) $\begin{matrix} x - y = 1 \\ x + y = 2007 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} x = 1 + y \\ 1 + y + y = 2007 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} x = 1 + y \\ 2y = 2006 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} y = 1003 \\ x = 1004. \end{matrix}$

b) $\begin{matrix} x - y = 3 \\ x + y = 669 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} x = 3 + y \\ 3 + y + y = 669 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} x = 3 + y \\ 2y = 666 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} y = 333 \\ x = 336. \end{matrix}$

d) $\begin{matrix} x - y = 9 \\ x + y = 223 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} x = 9 + y \\ 9 + y + y = 223 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} x = 9 + y \\ 2y = 214 \end{matrix}$ $\quad \begin{matrix} y = 107 \\ x = 116. \end{matrix}$

Demak, dastlabki berilgan tenglamaning yechimlari

$\{(1004;1003);\ (336;333);\ (116;107)\}$ juftliklar to‘plamidan iborat bo‘ladi.

Misol 6. $x - y = xy$ tenglamani butun sonlarda yeching.

Yechish. Quyidgi munosabatlarni yozamiz:

$x - y = xy \qquad x - xy = y \qquad x(1 - y) = y$.

Quyidagi ikki holni qaraymiz:

1) $y = 1$ bo‘lsin. Bunda tenglama yechimlarga ega bo‘lmaydi, chunki $0 \quad 1$;

2) $y \quad 1$ bo‘lsin. U holda tenglamaning ikkala tomonini $y - 1$ ga bo‘lib, quyidagini hosil qilamiz:

ISSN: 2181-4341, IMPACT FACTOR (RESEARCH BIB) – 7,245, SJIF – 5,431

$x = \frac{y}{y-1}$ yoki $x = 1 + \frac{1}{y-1}$.

x - butun son bo‘lgani uchun $y - 1 = \pm 1$ bo‘ladi. Shuning uchun berilgan tenglamani qanoatlantiruvchi $(0;0)$ va $(2;2)$ ikkita juftlikka ega bo‘lamiz.

Javob: $\{(0;0);(2;2)\}$.

Xulosa:

Chiziqli va chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni butun sonlarda yechish, shuningdek, Diofant tenglamalari. Chiziqli tenglamalar: Butun sonlarda chiziqli tenglamalar ax+b=0 ko‘rinishida ifodalanadi. Bu tenglamalarning yechimi, x=$-\frac{b}{a}$ formula yordamida aniqlanadi. Agar $-\frac{b}{a}$ butun son bo‘lsa, yechim mavjud, aks holda yechim yo‘q.

1. **Chiziqli bo‘lmagan tenglamalar**: Chiziqli bo‘lmagan tenglamalar ko‘pincha murakkabroq tuzilishga ega va ularni butun sonlarda yechish ancha qiyin. Masalan, $ax^2+bx+c=0$ kabi kvadrat tenglamalar uchun, Diskriminant yordamida yechimlar aniqlanadi.
2. **Diofant tenglamalari**: Diofant tenglamalari — butun sonlar uchun yechimlarni talab qiladigan tenglamalardir. Ular ko‘pincha ax+by=c shaklida ifodalanadi. Diofant tenglamalarini yechishda, katta qoidalar va algoritmlar, masalan, Evklid algoritmi, qo‘llaniladi. Bu tenglamalarda yechimlar mavjud bo‘lishi uchun, d=gcd (ab) ning c ga bo‘linishi shart.
3. **Yechimlar soni**: Chiziqli tenglamalar uchun yechimlar soni, ko‘pincha cheksiz bo‘lishi mumkin, agar ddd bo‘linmasa. Diofant tenglamalari esa, butun yechimlar to‘plamini aniqlashda murakkabliklar keltirib chiqarishi mumkin, lekin mavjud bo‘lsa, ularning soni ham cheksizdir.

Natijada, chiziqli va chiziqli bo‘lmagan tenglamalarni butun sonlarda yechish, shuningdek, Diofant tenglamalari, algebraik tahlil va sonlar nazariyasida muhim mavzular bo‘lib, ular matematik muammolarni hal qilishda va amaliyotda keng qo‘llaniladi.

Adabiyotlar ro'yxati

1. "Oliy matematika" by R. A. Rahimov - Chiziqli va chiziqli bo‘lmagan tenglamalar va Diofant tenglamalari.
2. "Matematika" by A. S. Qurbonov - Algebraik tenglamalar va ularning yechimlari.
3. "Algebra va analitik geometriya" by S. A. Kamilov - Chiziqli tenglamalar va ularning yechimlari.
4. "Chiziqli tenglamalar nazariyasi" by M. M. Qodirov - Chiziqli tenglamalarni yechish usullari va qo‘llanmalari.
5. "Diofant tenglamalari" by X. X. Teshaboev - Diofant tenglamalarining nazariyasi va yechimlari.
6. "Elementary Number Theory" by David M. Burton - Sonlar nazariyasi, Diofant tenglamalari va ularni yechish usullari.
7. "Introduction to the Theory of Numbers" by G.H. Hardy and E.M. Wright - Diofant tenglamalari va chiziqli tenglamalar.
8. "The Theory of Diophantine Equations" by J. J. Sylvester - Diofant tenglamalari va ularning xususiyatlari.
9. "Linear Diophantine Equations" by M. J. H. Derksen and J. C. W. Van Der Hoeven - Chiziqli Diofant tenglamalari.
10. "Number Theory" by George E. Andrews - Sonlar nazariyasi va Diofant tenglamalari.