JOURNAL OF IQRO – ЖУРНАЛ ИКРО – IQRO JURNALI – volume 13, issue 01, 2024
ISSN: 2181-4341, IMPACT FACTOR (RESEARCH BIB) – 7,245, SJIF – 5,431

Farg'ona davlat universiteti

Amaliy matematika va informatika kafedrasi professori

Karimov Shaxobiddin To‘ychiboevich, shaxkarimov@gmail.com

Farg'ona davlat universiteti.

Amaliy matematika va informatika fakulteti 2-kurs magistri,

Sulaymonova Oygul Abdulatif qizi oygulgofurova0405@gmail.com

Bir o’lchovli parabolik tipdagi tenglamani sonli yechishning har xil chekli ayirmali approksimatsiyalari.

Anotatsiya: Maqolada bir o’lchovli parabolik tipdagi tenglamani sonli yechishning har xil chekli ayirmali approksimatsiyalari ko’rib chiqilgan. Bunda obekt sifatida issiqlik tarqalish tenglamasi qaraladi.

Kalit so’zlar: Parabolik tenglama, sonli yechim, chekli ayirma usullari, ayirmali differensial tenglamalar, sonli differensial usullar

Quyida bir o‘lchovli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi misolida parabolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalarni sonli yechish usullari bilan tanishiladi. Buning uchun quyidagi differensial chegaraviy masala qaraladi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t,x), \quad t>0, \ \alpha \quad x \quad b, \qquad (1)$$

$$u(0,x) = \varphi(x), \quad a \quad x \quad b$$

$$u(t,a) = \mu(t), \quad u(t,b) = \nu(t), \quad t>0$$

Tavsiya qilinadigan variantlar misollarda berilgan ayirmali usulni va to‘r parametrlarini (vaqt va koordinata bo‘yicha qadamlarni) tanlashdan bog‘liq holda bu tenglama sonli yechimining o‘zgarish xususiyatlari qaraladi.

Bir o‘lchovli issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini sonli yechish uchun quyidagi ayirmali sxemalar qaraladi:

1) Oltinuqtali parametrik sxema;
2) Frankel-Dyufort sxemasi;
3) Richardson sxemasi;
4) markaziy to‘rtnuqtali oshkor sxema;
5) Alen-Chen sxemasi;
6) nomarkaziy to‘rtnuqtali oshkor sxema;
7) Saulyev sxemasi.

ISSN: 2181-4341, IMPACT FACTOR (RESEARCH BIB) – 7,245, SJIF – 5,431

Bir jinsli tenlamaning olingan taqribiy (sonli) yechimini uning bir qator test ma-salalar uchun olingan aniq yechimi bilan taqqoslash mumkin.

Qaralayotgan (3) masala uchun *to'rli soha* quyidagicha:

$$W^h = (t_p, x_m) \;,\; p = 0,1,\dots,P,\; m = 0,1,\dots,M,$$

$$u^h = u_m^p \;,\; p = 0,1,\dots,P,\; m = 0,1,\dots,M$$

bu yerda u_m^p -to'r funksiyaning (t_p, x_m), $t_p = p\tau$ tugunga tegishli komponentasi; τ -vaqt bo'yicha qadam; $P\tau = T;$ $x_m = x_1 + mh;$ h - koordinata bo'yicha qadam;

$$Mh = b - a$$

Ayirmali masala (*ayirmali sxema*)*ga misol*. Qaralayotgan differensial masala uchun mumkin bo'lgan ayirmali sxemalardan biri (oshkor sxema) quyidagicha yoziladi:

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - a^2 \frac{u_{m-1}^p - 2u_m^p + u_{m+1}^p}{h^2} = f_m^p$$

$$p = 0,1,\dots,P-1,\quad m = 0,1,\dots,M-1, \qquad (2)$$

$$u_m^0 = \varphi_m,\quad m = 0,1,\dots,M,$$

$$u_0^p = \mu^p,\; p = 1,2,\dots,P,$$

$$u_M^p = \nu^p,\; p = 1,2,\dots,P.$$

bu yerda $f_m^p = f(t_p, x_m);$ $\varphi_m = \varphi(x_m);$ $\mu^p = \mu(t_p);$ $\nu^p = \nu(t_p)$.

Ayirmali sxemaning shabloni. Qaralayotgan ayirmali sxema berilgan *m* va *p* larda *sxemaning shabloni* deb ataluvchi shaklni hosil qiluvchi to'rning to'rt nuqtasidagi yechim qiymatlarini bog'laydi.

Ustivorlikning spektral belgisi. Juda ko'plab evolyutsion masalalar sinfi uchun ustivorlikka tekshirishni o'zgarmas koeffisiyentli ayirmali masala holi uchun qo'llaniladigan spektral belgi orqali quyidagicha amalga oshirish mumkin.

Chegaraviy masala Koshi masalasidagi ayirmali tenglamaning o'ng tarafini nol bilan, φ_m funksiyani $e^{i\omega m}$ garmonika bilan almashtiramiz va bitta fazoviy o'zgaruvchili masala uchun yechimni quyidagicha izlaymiz:

$$u_m^p = \lambda p e^{i\omega m}$$

bu yerda ω - ixtiyoriy son, $0 \quad \omega \quad 2\pi$.

Ayirmali sxemaning ustivorligi uchun $\lambda = \lambda(\omega)$ spektr $\left|\lambda\right| \quad 1 + c\iota$ doirada yotishi zarur, bunda c parameter τ qadamdan bog‘liq emas. Endi $u_m^p = \lambda p e^{i\omega m}$ ifodani qaralayotgan ayirmali tenglamaga qo‘yib, quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$\frac{\lambda - 1}{\tau} + a^2 \frac{e^{-i\omega m} - 2 + e^{i\omega m}}{h^2} = 0$$

$$c, \tau = \frac{h^2}{6a^2}\sigma \quad \frac{1}{2}$$

$$u_m^0 = \varphi_m, m = 0, 1, \ldots, M,$$

$$u_0^p = \mu^p, u_M^p = \nu^p, p = 1, 2, \ldots, P$$

$$O(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{h^2}), K\delta)$$

$$\lambda = 1 - \frac{4a^2\tau}{h^2}\sin^2\frac{\omega}{2}$$

Ayirmali sxema ustivor deyiladi, agar $\left|\lambda\right| \quad 1$ shart bajarilsa, ya’ni τ, h larnishunday tanlash kerakki, $\frac{\tau a^2}{h^2} \quad 0,5$ bo‘lsin.

Agar (3) sxema quyidagicha yozilsa, u holda u *aniqligi oshirilgan ayirmali sxema* deyiladi:

$$u_m^{p+1} = \frac{1}{6}(u_{m-1}^p + 4u_m^p + u_{m+1}^p) + \frac{\tau}{12}(f_{m-1}^{\frac{p+1}{2}} + 10 f_m^{\frac{p+1}{2}} + f_{m+1}^{\frac{p+1}{2}}),$$

Bu yerda $\tau = \frac{h^2}{6a^2}$ o*ltinuqtali parametrik sxema*. Bunday to‘rli shablon *vaznli sxema* deb ham ataladi. Bu shablonga mos ayirmali sxema quyidagicha:

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - \frac{a^2}{h^2} \quad \sigma(u_{m-1}^{p+1} - 2u_m^{p+1} + u_{m+1}^{p+1}) + (1 - \sigma)(u_{m-1}^p - 2u_m^p + u_{m+1}^p) \quad = f_m^{\frac{p+1}{2}}$$

$$p = 0, 1 \ldots, P - 1; m = 1, 2, \ldots, M - 1 \qquad (4)$$

$$u_m^0 = \varphi_m, m = 0, 1, \ldots, M,$$
$$u_0^p = \mu^p, p = 1, 2, \ldots, P,$$
$$u_M^p = \nu^p, p = 1, 2, \ldots, P,$$

bu yerda $0 \quad \sigma \quad 1$- sxemaning parametri (vazni).

σ=0-to‘rtnuqtali oshkor sxema ;

σ=1-to‘rtnuqtali oshkormas sxema ;

$\sigma = \frac{1}{2}$ - Krank-Nikolson sxemasi ;

Hosil bo‘lgan uch diagonalli tuzilmaga ega matritsali chiziqli tenglamalar sistemasi progonka (haydash) usuli bilan yechiladi.

Approksimatsiya tartibi quyidagicha:

$$\sigma = \frac{1}{2},\ O(\tau^2 + h^2),\ \sigma = 0{,}1;\ O(\tau + h^2),\ \sigma = \frac{1}{6}\ \ O(\tau + h^4)$$

Agar $\sigma \quad \frac{1}{2}$ bo‘lsa, u holda ayirmali sxemaning ixtiyoriy qiymatida usti- vor; agar $\tau < \frac{h^2}{2a^2(1-2\sigma)}$ bo‘lsa, u holda $0 \quad \sigma \quad \frac{1}{2}$ da sxema ustivor.

1) *Frankel-Dyufort sxemasi*. Bu shablonga mos ayirmali sxema quyidagicha:

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - a^2 \frac{u_{m-1}^p - 2u_m^p + u_{m+1}^p}{h^2} = f_m^p$$

$$p = 0,1,\ldots,P-1,\quad m = 0,1,\ldots,M-1, \qquad (5)$$

$$u_m^0 = \varphi_m, m = 0,1,\ldots,M,$$
$$u_0^p = \mu^p, p = 1,2,\ldots,P, p+1$$
$$u_M^p = \nu^p, p = 1,2,\ldots,P$$

To‘r funsiyaning vaqt bo‘yicha ikkinchi qatlamdagi qiymati markaziy to‘rtnuqtali oshkor sxema bo‘yicha hisoblanadi. To‘r funksiyaning vaqt bo‘yicha yuqori $p+1$ qatlamdagi qiymati shu funksiyaning quyidagi ikkita p va $p-1$ qatlamlardagi qiymatlari bo‘yicha hisoblanadi.

Approksimatsiya tartibi: $O(\tau^2 + h^2)$.

Markaziy to‘rtnuqtali oshkor sxema. Bu shablonga mos ayirmali sxema quyidagicha:

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - a^2 \frac{u_{m-1}^p - 2u_m^p + u_{m+1}^p}{h^2} = f_m^p \qquad (7)$$

$$p = 1,2,\ldots,P-1;\quad m = 1,2,\ldots,M-1,$$

$$u_m^0 = \varphi_m, m = 0,1,\ldots,M,$$
$$u_0^p = \mu^p, p = 1,2,\ldots,P,$$

$$u_M^p = \nu^p, p = 1,2,\ldots,P.$$

To‘r funsiyaning vaqt bo‘yicha ikkinchi qatlamdagi qiymati markaziy to‘rtnuqtali oshkor sxema bo‘yicha hisoblanadi. To‘r funksiyaning vaqt bo‘yicha yuqori $p+1$ qatlamdagi qiymati shu funksiyaning quyidagi ikkita p va p-1 qatlamlardagi qiymatlari bo‘yicha hisoblanadi.

Approksimatsiya tartibi: $O(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{h^2})$.

Ushbu sxema ixtiyoriy $K = a^2 r, r = \frac{\tau}{h^2}$ qiymatlarda doimo ustivor.

2) *Richardson sxemasi*. Bu shablonga mos ayirmali sxema quyidagicha:

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{2\tau} - a^2 \frac{u_{m-1}^p - 2u_m^p + u_{m+1}^p}{h^2} = f_m^p$$

$$p = 0,1,\ldots,P-1, m = 1,2,\ldots,M-1, \qquad (6)$$

$$u_m^0 = \varphi_m, m = 0,1,\ldots,M,$$

$$u_0^p = \mu^p, p = 1,2,\ldots,P,$$

$$u_M^p = \nu^p, p = 1,2,\ldots,P.$$

To‘r funksiyaning vaqt bo‘yicha yuqori $p+1$ qatlamdagi qiymati shu funksiyaning quyidagi p qatlamdagi qiymatlari bo‘yicha hisoblanadi.

Approksimatsiya tartibi: $O(\tau + h^2)$

Sxema $K \quad \frac{1}{2}$ da ustivor.

3) *Alen-Chen sxemasi.* Bu shablonga mos ayirmali sxema quyidagicha:

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - a^2 \frac{u_{m-1}^p - 2u_m^p + u_{m+1}^p}{h^2} = f_m^p \qquad (8)$$

$$p = 0,1,\ldots,P-1; \quad m = 1,2,\ldots,M-1,$$

$$u_m^0 = \varphi_m, m = 0,1,\ldots,M,$$

$$u_0^p = \mu^p, p = 1,2,\ldots,P,$$

$$u_M^p = \nu^p, p = 1,2,\ldots,P.$$

To‘r funksiyaning vaqt bo‘yicha yuqori $p+1$ qatlamdagi qiymati shu funksi- yaning quyidagi p qatlamdagi qiymatlari bo‘yicha hisoblanadi, bunda avvalo ayirmali tenglama u_m^{p+1} ga nisbatan yechib olinadi.

Approksimatsiya tartibi: $O(\tau + h^2 + \frac{\tau}{h^2})$.

4) *Nomarkaziy oshkor sxema*. Bu shablonga mos ayirmali sxema quyidagicha:

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - a^2 \frac{u_{m-2}^p - 2u_{m-1}^p + u_m^p}{h^2} = f_m^p$$

$$p = 0,1,\ldots,P-1; \quad m = 2,3,\ldots,M \ , \qquad (9)$$

$$u_m^0 = \varphi_m, m = 0,1,\ldots,M \ ,$$

$$u_0^p = \mu^p, p = 1,2,\ldots,P,$$

$$u_M^p = \nu^p, p = 1,2,\ldots,P.$$

To‘r funksiyaning vaqt bo‘yicha yuqori $p+1$ qatlamdagi qiymati shu funksiyaning quyidagi qatlamdagi qiymatlari bo‘yicha hisoblanadi, bunda to‘r funksiyaning $\{m = 1; p = 1,2,\ldots,P\}$ nuqtalardagi qiymatlari oltinuqtali parametrik sxema bo‘yicha $\sigma = 1$ da hisoblanadi.

Approksimatsiya tartibi: $O(\tau + h)$.

Sxema K ning ixtiyoriy qiymatlarida noustivor.

5) *Saulyev sxemasi*. Bu shablonga mos ayirmali sxema quyidagicha:

$$\frac{u_m^{p+1} - u_m^p}{\tau} - a^2 \frac{u_{m-1}^{p+1} - (u_m^{p+1} + u_m^p) + u_{m+1}^p}{h^2} = f_m^{p+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{u_m^{p+2} - u_m^{p+1}}{\tau} - a^2 \frac{u_{m-1}^{p+1} - (u_m^{p+2} + u_m^{p+1}) + u_{m+1}^{p+2}}{h^2} = f_m^{p+\frac{3}{2}} \qquad (10)$$

$$p = 0,1,\ldots,P-2, m = 0,1,\ldots,M-1,$$

$$u_m^0 = \varphi_m, m = 0,1,\ldots,M \ ,$$
$$u_0^p = \mu^p, u_M^p = \nu^p, p = 1,2,\ldots,P$$

Masalani sonli yechish algoritmi (yugiruvchi hisob) ikki bosqichda bajariladi: chapdan o‘ngga (1-bosqich), o‘ngdan chapga (2-bosqich).

Approksimatsiya tartibi: $O(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^2}{h^2})$

Xususan, *maksimal aniqlikka ega oshkormas sxema* quyidagicha yoziladi

$$(1-6r)u_{m-1}^{p+1} + (10+12r)u_m^{p+1} + (1-6r)u_{m+1}^{p+1} = \tau(f_{m-1}^{\frac{p+1}{2}} + 10f_m^{\frac{p+1}{2}} + f_{m+1}^{\frac{p+1}{2}}) +$$

$$(1+6r)u_{m-1}^{p} + (10-12r)u_m^{p} + (1+6r)u_{m+1}^{p}$$

Bu yerda $r = \frac{\tau a^2}{h^2}$. Approksimatsiya tartibi: $O(\tau^2 + h^4)$.

Shunday qilib, parabolik tipdagi tenglama uchun ayirmali sxemalarning klassi- fikatsiyasi quyidagicha:

1) Ikki qatlamli uch nuqtali ayirmali sxemalar.
- sodda oshkor sxema (3);
- aniqligi oshirilgan oshkor sxema (3);
- sodda oshkormas sxema (4);
- Krank-Nikolson sxemasi(4);
- vaznli sxema (4);
- maksimal aniqlikka ega oshkormas sxema (11).

2) Uch qatlamli uch nuqtali ayirmali sxemalar (masalan, (5), (6), (10)).

Chegaraviy shartlarni sonli approksimatsiyalash.

1) Birinchi tur chegaraviy shartlar: $u\big|_{x=a} = \mu_1(t)$, va $u\big|_{x=b} = \nu_1(t)$

Izlanayotgan funksiyaning chegaradagi qiymatini chegaraviy shartdan oshkor ayirmali sxema yordamida quyidagicha topamiz:

$$u_0^{k+1} = \mu_1(t_{k+1}); \qquad u_N^{k+1} = \nu_2(t_{k+1}) \qquad (12)$$

Ikkinchi tur chegaraviy shartlar: $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a} = \mu_2(t)$ va $\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=b} = \nu_2(t)$

Ma’lumki (3) ayirmali sxemaning fazoviy koordinata bo‘yicha approksinatsiyasi tartibi ikkiga teng, u holda chegaraviy shartlarni ham ikkinchi tartibli aniqlik bilan approksimatsiya qilish mumkin. Bu quydagicha bajariladi:

a) x_0 nuqtadagi hosilani ikkinchi tartibli aniqlik bilan quyidagi approksimatsiyaga almashtiramiz:

$$\frac{u_1^k - u_{-1}^k}{2h} = \mu_2(t_k) \text{ yoki } u_{-1}^k = u_1^k - 2h\mu_2(t_k) \qquad (13)$$

Bu yerda u_{-1}^{k} temperaturaning fiksirlangan *i=-1* tugundagi qiymati.

б) farazlarga ko‘ra, (3) yechim $i = 0$ tugundagi tenglamani ham tuzib beradi:

$$u_0^{k+1} = Cu_{-1}^k + (1 - 2C - \tau)u_0^k + Cu_1^k + f_0^k\tau$$

Bu yerda $C = \dfrac{\tau}{h^2}$ (13) dan foydalanib, bu yerdan u_{-1}^{k} ni yo‘qotish mumkin:

$$u_0^{k+1} = (1-2C-\tau)u_0^k + 2Cu_1^k - 2Ch\mu_2(t_k) + f_0^k\tau \qquad (14)$$

Bu munosabat ikkinchi tur chegaraviy shartda temperaturaning chap chegaradagi qiymatini aniqlash imkonini beradi.

2)*Uchinchi tur chegaraviy shartlar*:

$$u - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=a} = \mu_3(t) \quad \text{va} \quad u + \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=b} = \nu_3(t)$$

Bu yerda ham xuddi ikkinchi tur chegaraviy shartdagidek, uchunchi tur che- garaviy shartlarning o‘xshash ayirmali holi quyidagicha yoziladi:

$$-\frac{u_1^k - u_{-1}^k}{2h} + u_0^k = \mu_3(t_k); \qquad \frac{u_{N+1}^k - u_{N-1}^k}{2h} + u_N^k = \nu_3(t_k) \qquad (15)$$

Yuqoridagi (3) ning $i = 0$ va $i = N$ uchun yozilgan holi hamda (15) danquyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$u_0^{k+1} = \left[1 - \tau - 2C(1+h)\right]u_0^k + 2Cu_1^k + 2Ch\mu_3(t_k) + f_0^k\tau \qquad (16)$$

$$u_N^{k+1} = 2Cu_{N-1}^k + \left[1 - \tau - 2C(1+h)\right]u_N^k + 2Ch\nu_3(t_k) + f_N^k\tau \qquad (17)$$

Bu holda ayirmali sxemaning ustivorlik sharti quydagicha: $C < \dfrac{1}{1+(1+h)^2}$.

Adabiyotlar

1. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. П. Некорректные задачи математической физики и анализа. – М: Наука, 1980. – 286 с
2. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986. – 287 с.
3. Ватульян А. О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. – М.: Физматлит, 2007. – 224 с.
4. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач. – М.: МГУ, 1994. – 208 с.
5. Латтес Р., Лионс Ж.-Л. Метод квазиобращения и его приложения. – М.: Мир, 1970. – 336 с.
6. Гельфанд И.М., Левитан Б.М. Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции // Изв. АН, сер. матем. - 1951. - Т.15.- С. 309-360.

7. Крейн М.Г. Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи // Докл. АН СССР. - 1954. - Т.94, № 6. - С. 767-770.
8. Романов В.Г. Обратные задачи математической физики. - М.: Наука, 1984. -263 с.
9. Кабанихин С.И. Проекционно-разностные методы определения коэффициента гиперболических уравнений. - Новосибирск: Наука, 1988.- 168 с.
10. Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи. – Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. - 457 с.
11. Лаврентьев М.М. Некорректные задачи для дифференциальных уравнений. учебное пособие. - НГУ, 1981. - 75 с.
12. Каримов Ш.Т., Юлбарсов Х. Задача Гурса для одного псевдопараболического уравнения третьего порядка с оператором Бесселя. Материалы IX международной научной конференции «Современные проблемы математики и физики» посвященная 70-летию чл.-корр. АН РБ К.Б. Сабитова, 12 - 15 сентября, Стерлитамак, 2021 г.
13. Каримов Ш.Т., Мамадалиева Ш. Решение коэффициентной обратной задачи для гиперболического уравнения сведением её к уравнению Гелфанда-Левитана первого рода. Fars Int J Edu Soc Sci Hum 10(12), 2022; Volume-10, Issue-12, pp. 142-151.
14. Каримов Ш.Т. О некоторых обобщениях свойств оператора Эрдейи-Кобера и их приложение. Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2017. № 2(18). С. 20-40. DOI: 10.18454/2079-6641-2017-18-2-20-40.
15. Каримов Ш.Т. Новые свойства обобщенного оператора Эрдейи – Кобера и их приложения. Доклады АН РУз. – 2014. -№ 5 -С. 11-13