Nurkayev Shuhrat Jurayevich
Turin politexnika universiteti akademik litseyi oliy toifali matematika fani o‘qituvchisi.
+998909280195

BUTUN KOEFFITSIYENTLI KO‘PHADLARNING RATSIONAL ILDIZLARI

Annotatsiya: Ushbu maqolada Butun koeffitsiyentli ko‘phadlarning ratsional ildizlari tushintiriladi.

Kalit so‘zlar: koeffitsiyent, bezu, tenglama, tenglik, teorema.

Аннотация: В данной статье объясняются рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами.

Ключевые слова: коэффициент, безу, уравнение, равенство, теорема.

Abstract: This article explains the rational roots of polynomials with integer coefficients.

Key words: coefficient, denominator, equation, equality, theorem.

Butun koeffitsiyentli ko‘phadlarning ratsional ildizlari.

Ko‘phadning butun ildizlarini topish.

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ...a_n$ (1)

berilgan bo‘lsin, bu yerda a_1, a_2, … , a_n - butun sonlar.

Teorema 1. Agar (1) ko‘phad butun ildizga ega bo‘lsa (ya’ni ildizi butun son bo‘lsa), u holda bu ildiz a_n (a_n 0) ozod hadning bo‘luvchisi bo‘ladi.

Isbot. $x_1 \neq 0$ – (1) ko‘phadning butun ildizi bo‘lsin. U holda quyidagi o‘rinli:

$$x_1^n + a_1x_1^{n-1} + a_2x_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x_1 + a_n = 0.$$

Tenglikning ikkala tomonini x_1 ga bo‘lib, quyidagini hosil qilamiz:

$$x_1^{n-1} + a_1x_1^{n-2} + \ldots + a_{n-1} + \frac{a_n}{x_1} = 0.$$

Bundan $x_1^{n-1}+a_1x_1^{n-2}+...+a_{n-2}x_1+a_{n-1}=-\frac{a_n}{x_1}$ ni hosil qilamiz. Teoremaning shartiga ko‘ra, oxirgi tenglikning chap tomoni butun son hisoblanadi. Shuning uchun o‘ng tomoni $-\frac{a_n}{x_1}$ ham butun son bo‘ladi. Demak, a_n ozod had x_1 ga qoldiqsiz bo‘linadi.

Misol 1. $x^3+x^2-10x+8=0$ tenglamaning butun ildizlarini toping.

Yechish. $a_1=1,\ a_2=-10$, $a_3=8$ - butun sonlar bo‘lgani uchun, tenglamaning ildizlari 8 soning bo‘luvchilari, ya’ni 1, -1, 2, -2, 4, -4, 8, -8 bo‘lishi mumkin.

x=1 da 1+1-10+8 = 0 ni hosil qilamiz. Demak, x=1 tenglamaning ildizi hisoblanadi va Bezu teoremasiga ko‘ra, tenglamaning chap tomoni x-1 ikkihadga bo‘linadi. Bo‘lishni bajaramiz:

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-10x+8 & x-1 \\ \cline{2-2} \underline{x^3-x^2\qquad\qquad} & x^2+2x-8 \\ 2x^2-10x+8 & \\ \underline{2x^2-2x\qquad} & \\ -8x+8 & \\ \underline{-8x+8} & \\ 0 & \end{array}$$

Bundan quyidagi tenglikni yozamiz: $x^3+x^2-10x+8=(x-1)(x^2+2x-8)$

Endi $x^2+2x-8=0$ tenglamani yechamiz. Uning ildizlari -4 va 2 bo‘ladi. Demak, dastlabki berilgan tenglamaning ildizlari {-4; 1; 2} to‘plamidan iborat.

Endi $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n=0$ (2) tenglamaning ildizlarini topamiz, bu yerda $a_0, a_1, ..., a_n$ - butun sonlar.

Teorema 2. Agar (2) tenglama $x_1=\frac{m}{k}$ ratsional ildizga ega bo‘lsa, u holda m - a_n ning bo‘luvchisi, k esa a_0 ning bo‘luvchisi bo‘ladi ($\frac{m}{k}$ -qisqarmaydigan kasr, m-butun, k- natural son).

Isbot. $\frac{m}{k}$ ni (2) ga qoyib, quyidagini hosil qilamiz:

$$a_0\frac{m^n}{k^n}+a_1\frac{m^{n-1}}{k^{n-1}}+a_2\frac{m^{n-2}}{k^{n-2}}+...+a_{n-1}\frac{m}{k}+a_n=0.$$

Tenglikning ikkala tomonini k^n ga ko‘paytiramiz. U holda quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$a_0m^n + a_1m^{n-1}k + a_2m^{n-1}k^2 + ... + a_{n-1}mk^{n-1} + a_nk^n = 0 \quad (3)$$

(3) ning ikkala tomonini k ga bo‘lib, quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$a_1m^{n-1} + a_2m^{n-1}k + ... + a_{n-1}mk^{n-2} + a_nk^{n-1} = -\frac{a_0m^n}{k} \quad (4)$$

(4) ning chap tomoni butun son bo‘lgani uchun uning o‘ng tomoni ham butun hisoblanadi. $\frac{m}{k}$ - qisqarmaydigan kasr bo‘lgani uchun a_0 k ga qoldiqsiz bo‘linadi. Demak, k - a_0 ning bo‘luvchisi hisoblanadi. Shunga o‘xshash, (3) ning ikkala tomonini m ga bo‘lib, m - a_n ning bo‘luvchisi ekanini bilish mumkin.

Misol 2. $6x^4 + 5x^3 + 10x^2 - 3x - 2 = 0$ tenglamani yeching.

Yechish: $a_0=6$, $a_1=5$, $a_2=10$, $a_3=-3$, $a_4=-2$ bo‘lgani uchun tenglamaning ratsional ildizlarini quyidagi sonlar orasidan izlash kerak:

$$1, -1, 2, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}.$$

x=1 da 6 + 5 + 10 – 3 – 2 0; x = -1da 6–5+10+ 3– 2 0;

x = 2 da 96 + 40 + 40 – 6 – 2 0; x = -2 da 96 – 40 + 40 + 6 – 2 0;

$x = \frac{1}{2}$ da $6 \frac{1}{16} + 5 \frac{1}{8} + 10 \frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2 = 0$ larni hosil qilamiz.

Shunday qilib, $x_1 = \frac{1}{2}$ - qaralayotgan tenglamaning ildizlaridan biri ekan. Tenglamaning chap tomonini 2x-1 ga bo‘lamiz:

$$\begin{array}{l|l}
6x^4 + 5x^3 + 10x^2 - 3x & 2x - 1 \\ \cline{2-2}
6x^4 - 3x^3 & 3x^3 + 4x^2 \\ \hline
8x^3 + 10x^2 - 3x - 2 & \\
8x^3 - 4x^2 & \\ \hline
14x^2 - 3x - 2 & \\
14x^2 - 7x & \\ \hline
4x - 2 & \\
4x - 2 & \\ \hline
0 &
\end{array}$$

Demak, $6x^4 + 5x^3 + 10x^2 - 3x - 2 = (2x-1)(3x^3 + 4x^2 + 7x + 2)$.

Endi $3x^3 + 4x^2 + 7x + 2 = 0$ (5) tenglamani yechamiz.

(5) tenglamaning ildizlarini qolgan $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}$ sonlardan izlaymiz. (5) ning chap tomoni faqat musbat koeffitsiyentlardan tashkil topgani uchun manfiy sonlarni tekshirib chiqish yetarli bo‘ladi.

$x=-\frac{1}{2}$ qiymatni (5) ga qo‘yib, $-3\ \frac{1}{8}+4\ \frac{1}{4}-7\ \frac{1}{2}+2\quad 0$ ni hosil qilamiz.

$x=-\frac{1}{3}$ da $-3\ \frac{1}{27}+4\ \frac{1}{9}-7\ \frac{1}{3}+2=0$. Shuning uchun $x_2=-\frac{1}{3}$ (5) tenglamaning ildizi bo‘ladi, demak dastlabki tenglamaning ham ildizi hisoblanadi.

Endi (5) ning chap tomonini 3x+1 ga bo‘lamiz:

$$
\begin{array}{l|l}
3x^3+4x^2+7x+2 & 3x+1 \\ \cline{2-2}
3x^3+x^2 & x^2+x+2 \\ \hline
3x^2+7x+2 & \\
3x^2+x & \\ \hline
6x+2 & \\
6x+2 & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

$x^2+x+2\ =0$ tenglamani yechish qoldi. $D=1^2-4\ 1\ 2=-7<0$ bo‘lgani uchun bu tenglama ildizlarga ega emas. Shunday qilib, dastlabki tenglamaning ildizlari quyidagilar:

$x_1=\frac{1}{2}$ va $x_2=-\frac{1}{3}$.

Xulosa:

Butun koeffitsientli ko‘phadlarning ratsional ildizlari. **Ratsional ildizlar teoremasi**: Agar P(x)P(x)P(x) ko‘phadning ratsional ildizi p/qp/qp/q (bu yerda ppp va qqq butun sonlar) bo‘lsa, unda ppp ko‘phadning oxirgi koeffitsiyentiga (a0a_0a0) va qqq birinchi koeffitsiyentiga (ana_nan) bo‘linishi kerak.

1. **Ildizlarni aniqlash**: Ratsional ildizlarni topish jarayoni koeffitsiyentlar o‘rtasidagi bog‘lanishlarni tahlil qilishni va ko‘phadni sinab ko‘rishni o‘z ichiga oladi.
2. **Geometrik va algebraik ahamiyati**: Ushbu ildizlar ko‘phadlarning grafikasini va xulq-atvorini tushunishda muhim rol o‘ynaydi.
3. **Amaliy qo‘llanish**: Butun koeffitsientli ko‘phadlar iqtisodiyot, muhandislik va boshqa ilmiy sohalarda modellashda keng qo‘llaniladi.

Natijada, butun koeffitsientli ko‘phadlarning ratsional ildizlari algebraik tahlil va matematik modellarni yaratishda muhim ahamiyatga ega bo‘lib, ularni tushunish va aniqlash, matematikada keng qamrovli va fundamental masalalardir.

Adabiyotlar ro’yxati

1. Joseph-Louis Lagrange - "Théorie des fonctions analytiques" (Analitik funksiyalar nazariyasi) — ko‘phadlar va ularning ildizlari haqida asar.
2. Carl Friedrich Gauss - "Disquisitiones Arithmeticae" — algebraik tenglamalar va ratsional ildizlar haqida asar.
3. Évariste Galois - Galois nazariyasi va algebraik ildizlarni o‘rganish bo‘yicha ishlar.

4. David Hilbert - "Grundlagen der Algebra" (Algebraning asoslari) — algebraik ko‘phadlar va ularning ildizlari bilan bog‘liq muammolar.
5. Michael Artin - "Algebra" — algebraik strukturalar va ko‘phadlar nazariyasi bo‘yicha zamonaviy asar.
6. Herbert W. Beckenbach - "The Algebra of Polynomials" — ko‘phadlar va ularning xususiyatlari haqida.
7. Titu Andreescu va Zuming Feng - "A Problem Solving Approach to Mathematics" — ko‘phadlar va ratsional ildizlar bilan bog‘liq masalalar.