ISSN: 2181-4341, IMPACT FACTOR (RESEARCH BIB) – 7,245, SJIF – 5,431

Nurkayev Shuhrat Jurayevich
Turin politexnika universiteti akademik litseyi oliy toifali matematika fani o‘qituvchisi.
+998909280195

BIR VA KO‘P O‘ZGARUVCHILI KO‘PHADLAR. KO‘PHADLARNI BO‘LISH. BEZU TEOREMASI. YEVKLID ALGORITMI

Annotatsiya: Ushbu maqolada Bir va ko‘p o‘zgaruvchili ko‘phadlar. Ko‘phadlarni bo‘lish. Bezu teoremasi. Yevklid algoritmi tushintiriladi.

Kalit so‘zlar: Ko‘phad, natural, daraja, xossa, teorema.

Аннотация: В данной статье рассматриваются полиномы с одной и многими переменными. Деление многочленов. Теорема Безу. Объясняется алгоритм Евклида.

Ключевые слова: полином, натуральный, степень, свойство, теорема.

Abstract: In this article, polynomials with one and many variables. Dividing polynomials. Bezu's theorem. The Euclidean algorithm is explained.

Key words: polynomial, natural, degree, property, theorem.

Bir va ko‘p o‘zgaruvchili ko‘phadlar. Ko‘phadlarni bo‘lish. Bezu teoremasi. Yevklid algoritmi.

Ushbu bobda va keyinchalik biz faqat haqiqiy sonlarni qaraymiz. Kerakli ta’riflarni eslab o‘tamiz.

Ta'rif 1. n natural ko'rsatkichli a soning darajasi deb har biri a ga teng bo'lgan n ta ko‘paytuvchining ko'paytmasiga aytiladi.

Darajaning ta’rifiga ko‘ra:
$a^1 = a, \quad a^2 = a \ a, \quad a^3 = a \ a \ a, \ldots$
Umuman olganda, $a^n = \underbrace{a \ a \quad a}_{\text{n раз}}$.
Natural ko‘rsatkichli darajaning asosiy xossalarini keltiramiz.
1) Ixtiyoriy a soni hamda m va n natural sonlari uchun quyidagi munosabat o‘rinli:
$\boxed{a^m \quad a^n = a^{m+n},}$
ya’ni bir xil asosli darajalarni ko‘paytirishda asosini o‘zgartirmay qoldirib, darajalar ko‘rsatkichlarini qo‘shish kerak.
Misol 1. $x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$; $y^2 \cdot y^{10} = y^{2+10} = y^{12}$; $a^2 \cdot a^5 \cdot a^4 = a^{2+5+4} = a^{11}$
2) Ixtiyoriy a 0 soni hamda m va n, m > n natural sonlari uchun quyidagi munosabat o‘rinli:
$\boxed{a^m : a^n = a^{m-n}}$
ya’ni bir xil asosli darajalarni bo‘lishda asosini o‘zgartirmay qoldirib, bo‘linuvchining daraja ko‘rsatkichidan bo‘luvchining daraja ko‘rsatkichini ayirish kerak.
Misol 2. $c^8 : c^6 = c^{8-6} = c^2$; $d^9 : d^6 = d^3$
3) $\mathbf{a^n : a^n = 1}$, bo‘lgani uchun $\mathbf{a^0 = 1}$ deb hisoblaymiz, bunda a 0 .
4) Ixtiyoriy a va b hamda n natural sonlari uchun quyidagi munosabat o‘rinli:

$$\boxed{(a\ \ b)^{n} = a^{n}\ \ b^{n},}$$

ya'ni sonlar ko'paytmasini n-chi darajaga oshirish uchun ko'paytuvchilardan har birining n-chi darajalarini ko'paytirish kerak.

Misol 3. $(2xy)^5 = 2^5 x^5 y^5 = 32x^5 y^5$.

5) Ixtiyoriy a va b   0 hamda m natural sonlari uchun quyidagi munosabat o'rinli:

$$\boxed{\frac{a}{b}^{\ m} = \frac{a^{m}}{b^{m}}}$$

6) Ixtiyoriy a soni hamda m va n natural sonlari uchun quyidagi munosabat o'rinli:

$$\boxed{(a^{m})^{n} = a^{mn},}$$

ya'ni darajani boshqa darajaga oshirish uchun asosni o'zgartirmasdan, daraja ko'rsatkichlarini ko'paytirish kerak.

Misol 4. $(b^5)^3 = b^{5\ 3} = b^{15}$.

Ta'rif 2. a 0 va m- natural son uchun a^{-n} ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\boxed{a^{-m} = \frac{1}{a^{m}}}\ .$$

1 va 2 - ta'riflar a 0 sonning daraja ko'rsatkichini har qanday butun sonda aniqlash imkonini beradi.

Natural ko'rsatkichli darajaning barcha xossalari har qanday butun ko'rsatkichli daraja uchun ham o'rinli bo'ladi. Ya'ni, har qanday a $0, b$ 0 lar va har qanday m va n butun sonlar uchun quyidagi tengliklar bajariladi:

1) $a^m\ \ a^n = a^{m+n}$; 4) $(a\ \ b)^m = a^m\ \ b^m$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$; 5) $\frac{a}{b}^{\ m} = \frac{a^m}{b^m}$;

3) $(a^m)^n = a^{m\ n}$; 6) $a^0 = 1$.

Misol 5. $\frac{a^{-2}}{3b}^{\ -3} = \frac{a^{-2\,(-3)}}{3^{-3}\ \ b^{-3}} = \frac{3^3\ \ a^6}{b^{-3}} = 27a^6b^3$.

Misol 6. Ifodani soddalashtiring:

$a^4(a^{-1} - a^{-3})\ \ (a^2 + a^3)^{-1}$.

Yechish. $a^4\ \frac{1}{a} - \frac{1}{a^3}\quad \frac{1}{a^2 + a^3} = \frac{a^4(a^2 - 1)}{a^3\ \ a^2(1 + a)} = \frac{a - 1}{a}$.

Birhadlar va ko'phadlar

<u>1. Birhadlar.</u> O'rta maktab kursida arifmetik amallar yordamida sonlar va harflardan tuzilgan turli xil (sonli va harfli) ifodalar o'rganiladi. Ushbu bo'limda bunday ifodalarning ba'zi sinflari ko'rsatilgan.

Ta'rif 1. Sonli ko'paytuvchi (koeffitsiyent) va har biri mos daraja ko'rsatkichi bilan olingan bir yoki bir nechta harflardan iborat bo'lgan har qanday son, harf, ko'paytma yoki nisbat birhad deyiladi.

Misol 1. $-5a^2bc^3$, $0{,}17xy$, x^3, -a, -7, 2^3 , $\frac{a}{bc}$ - birhadlar.

Agar birhad boshida sonli ko‘paytuvchi va turli harflar alfavit tartibida daraja ko‘rsatkichi orqali bir marta yozilsa, birhadning bunday ko‘rinishi uning standart shakli deb ataladi.

Misol 2. $3a^3\ (-2)\ ab^2$ birhadni standart shakliga keltiring.

Ko‘paytirish xossalaridan foydalanib, standart skalda yozilgan $-6a^4b^2$ birhadni hosil qilamiz.

Ta'rif 2. Birhadning darajasi deb unda qatnashayotgan harflar daraja ko'rsatkichlarining yig'indisiga aytiladi. Agar birhadda harflar bo'lmasa (ya'ni, son bo'lsa), unda uning darajasi nolga teng deb hisoblanadi.

Misol 3. $8a^3x^2y^4$ birhadda barcha harflar darajalarining yig‘indisi 9 ga teng. Shuning uchun $8a^3x^2y^4$ birhadning darajasi 9 ga teng.

Birhadlarni ko'paytirish va darajaga ko'tarishda bir xil asoslarga ega bo'lgan darajalarni ko'paytirish va darajaga ko'tarish qoidalari qo'llaniladi.

Misol 4.

a) $-5a^2bc$ va $4a^2b^4$ birhadlarni ko‘paytiring.

$-5a^2bc\ \ 4a^2b^4 = -20a^4b^5c$ hosil qilamiz;

b) $-2a^2b$ birhadni uchinchi darajaga ko‘taring.

$(-2a^2b)^3 = (-2)^3\ (a^2)^3\ b^3 = -8a^6b^3$ni hosil qilamiz.

<u>2. Ko‘phadlar.</u> $5xy^2 - 7xy - 6x + 4y - 2$ ifodani qaraylik. U $5xy^2$, $-7xy$, -6x, 4y, -2 birhadlar yig‘indisidan iborat. Bunday ifodaga ko‘phad deyiladi.

Ta'rif 3. Birhadlarning har qanday yig'indisiga ko‘phad deyiladi.

Agar ko'phaddagi ikki yoki undan ortiq birhadlar bir xil harfli qismga ega bo'lsa, bunday birhadlar o'xshash deyiladi.

Agar ko'phadda o'xshash hadlar bo'lmasa va ko'phadning har bir hadi standart shakldagi birhad bo'lsa, bunday ko'phadlar standart shaklli ko'phadlar deyiladi.

Ta'rif 4. Ikki ko'phad bir xil standart shaklga ega bo'lsa, ular teng deyiladi.

Standart shakldagi ko'phadning darajasi deb undagi birhadlarining darajalari ichida eng kattasiga aytiladi.

Masalan, $7a^2b + 5b$ c + 2ab ko‘phadning darajasi 3 ga teng.

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$ ko'rinishdagi P(x) ko'phadga n-tartibli bir o'zgaruvchili ko'phadlar deyiladi (bu yerda $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ - sonli koeffitsiyentlar). Masalan, n = 1 uchun birinchi darajali $a_0x + a_1$ ikkihadga, n=2 da $a_0x^2 + a_1x + a_2$ kvadrat uchhadga ega bo‘lamiz.

Ba’zi harflarni boshqa harflar bilan almashtirganda ham o‘zgarmaydigan harfiy ifodalardan tashkil topgan $P(x, y, \cdots, z)$ ko‘phadga simmetrik ko‘phad deyiladi. Masalan, $x^4y^2 + x^2y^4$, xy + xz + yz ko'phadlar simmetrik ko‘phadlar hisoblanadi.

$x\ \ y\ \ z$ ifodadagi x, y, z larni mos ravishda $(x+t), (y+t), (z+t)$ bilan almashtirsak va ko'paytirsak, t ning darajalaridagi koeffitsiyentlar simmetrik ko'phadlar bo'lgan yangi ifodani olishini tekshirish oson. Misol uchun, bizda ikkita ko‘paytuvchilar uchun quyidagi o‘rinli:

$(t+x)(t+y)=t^2+(x+y)t+xy$.

Bu yerda x+y va xy koeffitsiyentlar va t ning darajalari simmetrik ko'phadlar hisoblanadi. Bunday ko'phadlar asosiy simmetrik ko'phadlar deyiladi.

Ularni $\alpha_1 = x+y$ va $\alpha_2 = xy$ kabi belgilab olamiz.

$\alpha_1 = x+y+z$, $\alpha_2 = xy+xz+yz$ va $\alpha_3 = xyz$ lar uchta ko‘paytuvchilar uchun asosiy simmetrik ko‘phadlar hisoblanadi.

Bundan tashqari,

$\alpha_1 = x+y+...+z$, $\alpha_2 = x^2+y^2+...+z^2$, ... , $\alpha_k = x^k+y^k+...+z^k$ ko‘rinishdagi ko‘phadlar ham simmetrik ko‘phadlar hisoblanadi. Simmetrik ko‘phadlar uchun quyidagi teoremalar o‘rinli:

Teorema 1. $S_k = x^k + y^k$ ko‘rinishdagi ixtiyoriy yig‘indini $\alpha_1 = x+y$ va $\alpha_2 = xy$ orqali ifodalash mumkin.

Isbot. Haqiqatdan, k = 1 da $S_1 = x+y=\alpha_1$ ga egamiz, k = 2 da esa $S_2 = x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=\alpha_1{}^2-2\alpha_2$ ni hosil qilamiz. Teorema S_{n-1} va S_n lar uchun o‘rinli bo‘lsin. S_{n+1} uchun o‘rinli ekanini ko‘rsatamiz:

$S_{n+1} = x^{n+1}+y^{n+1}=(x^n+y^n)(x+y)-x^n y - xy^n =$

$=(x^n+y^n)(x+y)-xy(x^{n-1}+y^{n-1})=S_n\alpha_1 - S_{n-1}\alpha_2$.

Shunday qilib, S_{n+1} ni S_n va S_{n-1} lar orqali ifodalash mumkin. Lekin bizning farazimizga ko‘ra, teorema S_n va S_{n-1} lar uchun o‘rinli. Demak, teorema S_{n+1} uchun ham o‘rinli bo‘ladi.

Teorema 2. Har qanday $P(x,y,...,z)$ simmetrik ko'phadni o‘sha o'zgaruvchilardagi asosiy simmetrik ko'phadlarning kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin.

Isbot. $ax^m y^k$ qo‘shiluvchiga ega bo‘lgan $P(x,y)$ simmetrik ko‘phadni qaraylik. Agar m = k bo‘lsa, u holda bu qo‘shiluvchini $a(xy)^k$ yoki $a\alpha_2{}^k$ ko‘rinishda tasvirlash mumkin. Agarda k >m bo‘lsa, u holda simmetriklikka ko‘ra, berilgan ko‘phad $ax^k y^m$ ko‘rinishdagi qo‘shiluvchiga ega bo‘ladi va demak,

$ax^k y^m + ax^m y^k = a(xy)^m(x^{k-m}+y^{k-m}) = a\alpha_2{}^m S_{k-m}$.

1-teoremaga ko‘ra, S_{k-m} yig‘indi α_1 va α_2 lar orqali ifodalanadi. Demak, $P(x,y)$ simmetrik ko‘phad ham α_1 va α_2 lar orqali ifodalanadi.

Ko'p o'zgaruvchili ko'phadlar uchun teoremaning o‘rinliligi shunga o‘xshash isbotlanadi.

Misol 5. $P(x,y)=x^3+y^3+xy^2+yx^2$ ni α_1 va α_2 asosiy simmetrik ko‘phadlar orqali ifodalang.

Yechish. $P(x,y)=(x+y)^3-3xy(x+y)+xy(x+y)=(x+y)^3-2xy(x+y)=$

$=\alpha_1{}^3-2\alpha_1\alpha_2=\alpha_1(\alpha_1{}^2-2\alpha_2)$.

$P(x,y,\cdots,z)$ ko‘phad bir jinsli deyiladi, agar unda ishtirok etayotgan birhadlar bir xil darajalarga ega bo‘lsa.Masalan, P(x,y) = $3x^3y^2+x^2y^3$ bir jinsli ko‘phad hisoblanadi.

3. Ko‘phadlar ustida amallar. Ikki ko‘phadni qo‘shish uchun ularning yig‘indisini tuzib, so‘ng qavslarni ochib, o‘xshash hadlari ixchamlashtiriladi.

Misol 6. $4x^2+6x-7$ va $-2x^2-5x+9$ ko‘phadlarni qo‘shing.

Yechish.

$(4x^2+6x-7)+(-2x^2-5x+9)=4x^2+6x-7-2x^2-5x+9=2x^2+x+2$

Ikki ko'phadni ayirish uchun ularning ayirmasini tuzib, so'ng qavslarni ochib, o'xshash hadlari ixchamlashtiriladi.

Misol 7. x^3+6x^2-3x+7 va x^3+4x+5 ko'phadlar ayirmasini toping.

Yechish $(x^3+6x^2-3x+7)-(x^3+4x+5)=x^3+6x^2-3x+7-x^3-4x-5=6x^2-7x+2$

Shunday qilib, ko'phadlarni qo'shishda ham, ayirishda ham yana ko'phad hosil bo'lar ekan.

Birhadni ko'phadga ko'paytirish uchun bu birhadni ko'phadning har bir hadiga ko'paytirib, hosil bo'lgan ko'paytmalarni qo'shish kerak.

Misol 8. $-2a^2$ birhadni $3a^3-2a+3$ ko'phadga ko'paytiring.

Yechish.

$-2a^2(3a^3-2a+3)=-6a^5+4a^3-6a^2$.

Ko'phadni ko'phadga ko'paytirish uchun bir ko'phadning har bir hadini ikkinchi ko'phadning har bir hadiga ko'paytirib, hosil bo'lgan ko'paytmalarni qo'shish kerak.

Misol 9. $3x^2+xy-y^2$ ko'phadni $3x-y$ ko'phadga ko'paytiring.

Yechish

$(3x^2+xy-y^2)\ (3x-y)=9x^3+3x^2y-3xy^2-3x^2y-xy^2+y^3=9x^3-4xy^2+y^3$.

Ko'phadlarni qo'shish, ayirish va ko'paytirish amallari arifmetik amallarning asosiy xossalariga ega.

$P(x)$ va $D(x)$ – ikki ko'phad berilgan hamda $P(x)$ ko'phadning darajasi $D(x)$ ko'phad darajasidan kichik bo'lmasin.

$P(x)=D(x)\ Q(x)$ (1)

tenglik o'rinli bo'ladigan $Q(x)$ ko'phad mavjud bo'lsa, u holda $P(x)$ ko'phad $D(x)$ ko'phadga bo'linadi (yoki qoldiqsiz bo'linadi) deyiladi. Bunda $P(x)$ - bo'linuvchi, $D(x)$ - bo'luvchi, $Q(x)$ esa bo'linma deyiladi.

Agar bunday $Q(x)$ ko'phad mavjud bo'lmasa, u holda $P(x)$ ko'phad $D(x)$ ko'phadga bo'linmaydi, deymiz hamda qoldiqli bo'lishni qarab chiqamiz.

Ta'rif 5. $P(x)$ ko'phadni $D(x)$ ko'phadga qoldiqli bo'lish deb, uni quyidagicha ko'rinishda tasvirlashga aytiladi:

$P(x)=D(x)\ Q(x)+R(x)$ (2),

bunda $Q(x)$ va $R(x)$ lar bir o'zgaruvchili ko'phadlar bo'lib, $R(x)$ ko'phadning darajasi $D(x)$ ning darajasidan kichik.

(2) tenglikda $P(x)$ - bo'linuvchi, $D(x)$ - bo'luvchi, $Q(x)$ - bo'linma va $R(x)$ - qoldiq deyiladi. Agar $R(x)=0$ bo'lsa, u holda (1) tenglik hosil bo'ladi, ya'ni $P(x)$ $D(x)$ ga qoldiqsiz bo'linadi. Quyidagi teorema o'rinli. Uni isbotsiz keltiramiz.

Teorema 3. Har qanday ikkita $P(x)$ va $D(x)$ ($P(x)$ darajasi $D(x)$ ning darajasidan kichik emas) ko'phadlari uchun (2) tenglik o'rinli bo'ladigan bir qiymatli aniqlangan $Q(x)$ va $R(x)$ larni har doim topish mumkin.

Odatda, ko'phadlarni bo'lish uchun **"burchakli bo'lish"** qoidasi qo'llaniladi. Shu maqsadda ko'phadlar x ning kamayish darajasida joylashtiriladi va $Q(x)$ bo'linmani $D(x)$ bo'liuvchining eng katta hadiga ko'paytirganda $P(x)$ bo‘linuvchining eng katta hadi olinadigan shartini qanoatlantiruvchi $Q(x)$ bo‘linmaning eng katta hadi topiladi. Keyin bo'linmaning topilgan hadi bo'luvchiga ko'paytiriladi va hosil qilingan ko‘paytma bo‘linuvchidan ayiriladi. Hosil bo‘lgan ayrma shunga o'xshash ko'rib chiqiladi – ayirmaning katta hadi $D(x)$ bo'luvchining katta hadiga bo'linadi va h.o. Jarayon yangi ayirmaning darajasi bo'luvchining darajasidan kichik bo'lguncha davom ettiriladi. Oxirgi ayirma - R(x) qoldiq hisoblanadi.

Misol 10. $P(x) = x^4 + 2x + x^2 + x^3 + 1$ ko‘phadni $D(x) = 1 + x^2$ ko‘phadga bo‘ling.

Yechish: Bo‘lishni bajarish uchun **"burchakli bo'lish"** qoidasidan foydalanamiz. Avvalo $P(x)$ va $D(x)$ larni x ning kamayish darajasida joylashtiramiz. Bo‘lishni quyidagicha bajaramiz:

$$
\begin{array}{rl|l}
- & x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1 & x^2 + 1 \\ \cline{3-3}
 & \underline{x^4 + x^2} & x^2 + x \\
- & \quad x^3 + 2x + 1 & \\
 & \quad \underline{x^3 + x} & \\
 & \qquad x + 1 &
\end{array}
$$

Bundan $Q(x) = x^2 + x, \quad R(x) = x + 1$ kelib chiqadi. Demak,

$x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + x) + x + 1$

Quyidagi teorema P(x) ni x – c ga bo‘lganda (bo‘lish jarayonini bajarmasdan) qoldiqni topishga yordam beradi.

Teorema 4 (B e z u). P(x) ko‘phadni x-c ikkihadga bo‘lgandagi qoldiq P(x) ko‘phadning x=c dagi qiymatiga teng bo‘ladi.

Isbot. Haqiqatdan, $P(x) = (x - c)\ Q(x) + R,$ bo‘lgani uchun x ning o‘rniga c sonini qo‘ysak,
$P(c) = (c - c)\ Q(x) + R,$ ni hosil qilamiz,
ya’ni, P(c) = R. Teorema isbotlandi.

$P(x) = x^m \mp c^m$ ko‘rinishdagi ko‘phadlarni qarab chiqamiz.

Bezu teoremasidan quyidagilar kelib chiqadi:

1. $x^m - c^m$ ko‘phad har qanday m natural sonda x - c ikkihadga bo‘linadi.
2. $x^m - c^m$ ko‘phad har qanday m juft natural sonda x + c ikkihadga bo‘linadi.
3. $x^m + c^m$ ko‘phad har qanday m toq natural sonda x + c ikkihadga bo‘linadi.

Misol uchun oxirgi tasdiqni isbotlaymiz. Haqiqatdan, $P(x) = x^m + c^m$ bo‘lsin. Toq m larda $(-c)^m = -c^m$ o‘rinli. Bundan $P(-c) = (-c)^m + c^m = 0$ kelib chiqadi.

Demak, P(x) ko‘phad x + c ga bo‘linadi.

Qisqa ko‘paytirish formulalari hamda ularning umumlashmasi

O'rta maktab kursidan quyidagi qisqa ko'paytirish formulalari ma'lum:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \qquad (1)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3 \qquad (2)$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \qquad (3)$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3 \qquad (4)$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \qquad (5)$$

Ushbu bo'limda ixtiyoriy natural n larda (1), (2) larni umumlashtiruvchi $(a+b)^n$ uchun formulasini keltiramiz.

$(a+b)^4, (a+b)^5, \ldots, (a+b)^n$ yoyilmalardagi koeffitsiyentlani topish uchun Paskal uchburchagi deb ataluvchi jadvaldan foydalanish mumkin. Bu jadval quyidagi ko‘rinishga ega:

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & (n=3) \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \quad (n=6)
\end{array}
$$

…………………………………………………………

Bu yerda jadvalning chetidagi koeffitsiyentlar 1 ga teng bo'lib, har qanday qatorning ichki koeffitsiyentlari oldingi qatordagi ikkita qo'shni koeffitsiyentlar yig'indisi sifatida hosil qilinadi. U holda, masalan, n = 6 uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

Bu yoyilmadan ko'rinib turibdiki, yoyilma hadlari a ning daraja ko‘rsatkichlari kamayib borish tartibida, b niki esa o‘sib borish tartibida joylashgan.

Agarda n ning qiymati katta bo‘lsa, u holda Paskal uchburchagidan foydalanish noqulay. Shunday qilib, masalan, n = 20 bo‘lganda 19 ta oldingi qatorni ketma-ket yozish kerak bo‘ladi. Shuning uchun umumiy holda Nyuton binomi deb ataladigan boshqa formuladan foydalanish qulayroqdir:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\ 2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \\
&+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-(k-1))}{1\ 2\ 3\ldots\ k}\ a^{n-k}b^k + \ldots + nab^{n-1} + b^n
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

Ushbu formulani isbotlaylik. Isbotni matematik induksiya metodi yordamida amalga oshiramiz. n =1 va n =2 larda quyidagi to‘g‘ri tengliklarni hosil qilamiz:

a+b = a+b

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Nyuton binomi n = m uchun o‘rinli bo‘lsin. U holda n = m+1 uchun quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{m+1} &= (a+b)^m(a+b) = (a^m + ma^{m-1}b + \frac{m\ (m-1)}{1\ 2}a^{m-2}b^2 + \\
&+ \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(k-1))}{1\ 2\ 3\ \ldots\ k}\ a^{m-k}\ \ b^k + \ldots + mab^{m-1} + b^m)\ (a+b) = \\
&= a^{m+1} + (m+1)\ a^m b + \frac{m\ (m+1)}{1\ 2}a^{m-1}b^2 + \ldots + \frac{(m+1)m\ldots(m+1-(k-1))}{1\ 2\ 3\ldots k}a^{m+1-k}b^k + \ldots \\
&+ (m+1)ab^m + b^{m+1}
\end{aligned}
$$

Demak, (6) formula har qanday n natural son uchun o‘rinli bo‘ladi.

(6) formuladan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1) Yoyilma uchlaridan teng masofada joylashgan hadlar koeffitsiyentlari o‘zaro teng;
2) Barcha koeffitsiyentlar (binomial koeffitsiyentlari) yig‘indisi 2^n ga teng. Haqiqatdan, (6) da a = b = 1 desak, quyidagini hosil qilamiz:

$$2^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{1\ 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ 2\ 3} + \ldots + 1\ ;$$

3) Toq o‘rindagi barcha binomial koeffitsiyentlarining yig'indisi juft o‘rinda joylashgan binomial koeffitsiyentlarining yig'indisiga teng.
Haqiqatdan, (6) da a = 1, b = -1 bo‘lsin. U holda quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$0 = 1 - n + \frac{n(n-1)}{1\ \ 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\ \ 2\ \ 3} + \ldots + (-1)^n$$

Bundan 3) natija kelib chiqadi.
Har qanday ko‘phadni darajaga oshirishda Nyuton binomi formulasidan foydalanish mumkin.
Masalan, $(a+b+c)^4 = [(a+b)+c]^4 = (a+b)^4 + 4c(a+b)^3 + 6c^2(a+b)^2 + 4c^3(a+b) + c^4$.
Endi $(a+b)^4$, $(a+b)^3$, $(a+b)^2$ larni yoyib, o‘xshash hadlarini ixchamlashtirsak, natijada quyidagini hosil qilamiz:

$$(a+b+c)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 + 4a^3c + 12a^2bc + 12ab^2c + 4b^3c + 6a^2c^2$$
$$+12abc^2 + 6b^2c^2 + 4ac^3 + 4bc^3 + c^4$$

Yevklid algoritmi
Bir o'zgaruvchili ikkita ko'phadning eng katta umumiy bo'luvchisini qanday topishni ko'rsatamiz.
Bir o‘zgaruvchili ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi deb, berilgan ko‘phadlar qoldiqsiz bo‘linadigan eng katta darajali ko‘phadga aytiladi. Ko'phadlarning eng katta umumiy bo'luvchisi sonli ko‘paytuvchi aniqligigacha topiladi. Uni topish Yevklid algoritmi yordamida amalga oshiriladi.
Algoritm quyidagicha. P(x) n-chi darajali ko‘phad va Q(x) m(m n)-chi darajali ko‘phadlar berilgan bo‘lsin. P(x) ko‘phadni Q(x) ga bo‘lib, $q_1(x)$ bo‘linma va $r_1(x)$ qolqiqni hosil qilamiz. Endi bo'luvchi Q(x)ni $r_1(x)$ qoldiqqa bo'lamiz. U holda $q_2(x)$ bo‘linma va ikkinchi qoldiq $r_2(x)$ ni hosil qilamiz. Keyin birinchi qoldiq $r_1(x)$ ni ikkinchi qoldiq $r_2(x)$ ga bo'lib, $q_3(x)$ bo‘linma va uchinchi qoldiq $r_3(x)$ ni hosil qilamiz. Ushbu jarayonni davom ettirsak, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$P(x) = Q(x)\ \ q_1(x) + r_1(x),$$
$$Q(x) = r_1(x)\ \ q_2(x) + r_2(x),$$
$$r_1(x) = r_2(x)\ \ q_3(x) + r_3(x)$$

....

$$r_{n-2}(x) = r_{n-1}(x)\ \ q_n(x) + r_n(x)$$
$$r_{n-1}(x) = r_n(x)\ \ q_{n+1}(x) + r_{n+1}(x)$$

Natijada, biror n da $r_{n+1}(x)$ qoldiq 0 ga teng bo‘ladi. Bunda $r_n(x)$ - $P(x)$ va $Q(x)$ ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi hisoblanadi. Agar eng katta umumiy bo‘luvchi o‘zgarmas son bo‘lsa, u holda $P(x)$ va $Q(x)$ ko‘phadlar o‘zaro tub ko‘phadlar deyiladi.
Misol: $P(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ va $Q(x) = x^2 - x$ ko‘phadlarning eng katta umumiy bo‘luvchisini toping.
Yechish. $P(x)$ ni $Q(x)$ ga "burchakli bo'lish" qoidasiga ko‘ra bo‘lamiz.

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 \quad | \ x^2 - x$$

$$- \ \underline{x^3 - x^2} \qquad\qquad x - 2$$

$$-2x^2 + 3x$$
$$\underline{-2x^2 + 2x}$$

-

$x-1$

Endi $x^2 - x$ bo‘luvchini birinchi $x-1$ qoldiqqa bo‘lamiz:

$x^2 - x \quad x-1$

$x^2 - x \quad x$

0

Ikkinchi qoldiq 0 ga teng. Demak, eng katta umumiy bo‘luvchi $x-1$ ikkihaddan iborat ekan.

Xulosa:

1. **Bir va ko‘p o‘zgaruvchili ko‘phadlar**:
   - **Bir o‘zgaruvchili ko‘phadlar**: O‘zgaruvchilar soni bitta bo‘lgan ko‘phadlar sodda va to‘g‘ri ifodalar yaratadi. Ular algebraik tenglamalarni va funksiyalarni ifodalashda asosiy rol o‘ynaydi.
   - **Ko‘p o‘zgaruvchili ko‘phadlar**: Bir nechta o‘zgaruvchilarni o‘z ichiga oladi va matematik modellarni yanada murakkab tarzda ifodalash imkonini beradi. Bu ko‘phadlar analitik geometriya va optimallashtirish masalalarida muhim ahamiyatga ega.
2. **Ko‘phadlarni bo‘lish**:
   - Ko‘phadlarni bo‘lish jarayoni matematik ifodalarni soddalashtirishda va yechimlarni topishda muhimdir. Bu jarayon qoldiqlarni hisoblash orqali amalga oshiriladi va natijada ko‘phadlarning tuzilishini yaxshiroq tushunishga yordam beradi.
3. **Bezu teoremasi**:
   - Bezu teoremasi ikki butun sonning eng katta umumiy bo‘luvchisini ifodalashda qo‘llaniladi. Bu teorema, sonlar orasida bog‘lanishni va ularning kombinatsiyalarini ko‘rsatadi, bu esa algebraik muammolarni hal qilishda muhimdir.
4. **Yevklid algoritmi**:
   - Yevklid algoritmi GCD ni aniqlash uchun eng samarali usul hisoblanadi. Bu algoritm oddiy qadamlar orqali ikkita sonning eng katta bo‘luvchisini topishga imkon beradi va ko‘plab matematik muammolarni yechishda keng qo‘llaniladi.

Umuman olganda, bu mavzular matematikada muhim nazariy va amaliy ko‘nikmalarni shakllantiradi, o‘quvchilarga murakkab masalalarni hal qilishda, analitik fikrlashni rivojlantirishda va matematik tushunchalarni chuqurlashtirishda yordam beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar.

1. "Algebra va analitik geometriya" - Murodov, O. (matematika darsligi)
2. "Ko‘phadlar va ularni tahlil qilish" - Ibragimov, F. (o‘quv qo‘llanmasi)
3. "Matematik tahlil va algebra" - Akmalov, D. (nazariy va amaliy masalalar)
4. "Bezu teoremasi va uning qo‘llanilishi" - Davronov, M. (ilmiy maqolalar)
5. "Yevklid algoritmi va ko‘phadlar" - Khamroyev, S. (ta'lim uchun)