

**Богдан Анна Михайловна**  
**Ферганский Государственный Университет,**  
**факультета математики-информатики,**  
**направление математики,**  
**студентка третьего курса**  
**E-mail: [annabogdan2305539@gmail.com](mailto:annabogdan2305539@gmail.com)**

---

**ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ПОСТРОЕНИЮ  
ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО СИНГУЛЯРНОГО  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ**

**Аннотация:** В данной статье рассматривается обобщенная функция и ее применение к построению фундаментального решения обыкновенного сингулярного дифференциального уравнения. Обобщенные функции являются математическим инструментом, позволяющим обобщить понятие функции и работать с объектами, которые не являются обычными функциями. В контексте решения сингулярных дифференциальных уравнений, обобщенные функции позволяют учесть особенности поведения решений в точках, где обычные функции не определены или не дифференцируемы. Статья описывает методы и подходы к построению фундаментального решения сингулярного дифференциального уравнения с использованием обобщенных функций. Рассматриваются различные типы сингулярностей, такие как скачки, разрывы, источники и стоки, и предлагаются способы учета этих особенностей при построении решения.

**Ключевые слова:** Обобщенные функции, функцией Хевисайда, фундаментальное решение, линейный дифференциальный оператор, сингулярные уравнения математической физики, функция Дирака.

---

Обобщенные функции - математическое понятие, обобщающее классическое понятие функции. Обобщенные функции были введены впервые в конце 20-х гг. XX в. П. Дираком в его исследованиях по квантовой механике, где он систематически использует понятие дельта-функции и ее производных. Основы математической теории обобщенных функций были заложены С.Л. Соболевым в 1936 году при решении задачи Коши для гиперболических уравнений, а в послевоенные годы французский математик Л. Шварц дал систематическое изложение теории обобщенных функций. Важную роль в формировании теории обобщенных функций сыграли работы Ж. Адамара, в которых в связи с изучением фундаментальных решений волновых уравнений рассмотрены сходящиеся интегралы, а также работы М. Рисса.

В дальнейшем теорию обобщенных функций интенсивно развивали многие математики, главным образом из-за потребностей математической физики. Теория обобщенных функций имеет многочисленные применения и все шире входит в обиход физика, математика и инженера.

Обобщенная функция понимается как непрерывный функционал над некоторым классом основных функций. В зависимости от рассматриваемых задач используются самые разнообразные классы основных функций, учитывающие специфику задачи.

Рассмотрим обобщенные функции на  $\Omega$ , где  $\Omega$  - отрезок  $[a, b]$ . Основные функции на  $\Omega$  берутся бесконечно дифференцируемыми внутри  $\Omega$  с предписанным поведением на концах  $\Omega$ . Значение обобщенной функции  $f$  как функционала над основной функцией  $\varphi$  будет обозначаться в виде  $(f, \varphi)$ . Обобщенная функция называется регулярной, если существует такая локально суммируемая функция  $f(x)$ , что  $\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx$  существует для всех основных функций  $\varphi(x)$  и

$$(f, \varphi) = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx \quad (1)$$

(предполагается, что в качестве  $(f, \varphi)$  выбрана билинейная форма, совпадающая с (1) в случае регулярной обобщенной функции).

Функцией Хевисайда называют обобщенную функцию  $\theta(x)$  действующую по формуле

$$(\theta(x), \varphi(x)) = \int_0^{\infty} \varphi(x)dx.$$

Это регулярная обобщенная функция, и ее действие на основные функции задается по формуле (1) с помощью локально интегрируемой в  $R$  функции

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Эту функцию еще называют функцией единичного скачка.

Класс  $X = X(\Omega)$  основных функций предполагается наделенным топологией (сходимостью). Через  $X' = X'(\Omega)$  обозначаем топологический сопряженное к  $X$  пространство обобщенных функций.

Понятие обобщенной функции, сосредоточенной в точке. Известная  $\delta$  - функция Дирака  $\delta(x - x_0)$ ,  $x_0 \in \Omega$ , и ее производные, действующие по правилу

$$(\delta^{(k)}(x - x_0), \varphi) = (-1)^k \varphi^{(k)}(x_0),$$

представляют собой примеры обобщенных функций, сосредоточенных в точке. Справедливо и обратное утверждение: всякий функционал  $f$ , сосредоточенный в точке  $x_0$ , имеет вид  $f = \sum_{k=0}^N c_k \delta^{(k)}(x - x_0)$ .

### Понятие фундаментального решения дифференциальных уравнений

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор порядка  $m$

$$L(D) = \sum_{|\alpha|=0}^m a_\alpha D^\alpha$$

здесь  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  - мультииндекс,  $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m$  - длина мультииндекса,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}.$$

**Определение.** Фундаментальным решением (функцией влияния, элементарным решением) оператора  $L(D)$  называется обобщенная функция  $E(x)$  удовлетворяющая равенству  $L(D)E(x) = \delta(x)$ .

Хорошо известно, что фундаментальным решением оператора Лапласа является радиальная функция [1], которую удобно трактовать как функцию одного переменного. Поэтому естественно попытаться свести поиск такого решения к поиску фундаментального решения обыкновенного дифференциального уравнения. Но здесь возникают сложности, связанные с тем, что сферическое преобразование координат  $x = r\Theta$ ,  $|\Theta| = 1$  в  $R^n$  сводит уравнение

$$\Delta u(x) = \delta(|x|), \quad \Delta = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

к уравнению с оператором Бесселя

$$B_{n-1}u(r) = \delta_{n-1}(r), \quad B_{n-1} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{n-1}{r} \frac{d}{dr},$$

для которого в классических курсах математической физики не приводятся формулы фундаментальных решений. В то же время широко используется теорема о фундаментальном решении обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, позволяющая вместе с преобразованием Фурье легко находить фундаментальное решение классических нестационарных уравнений. Последняя теорема имеет простое и, главное, просто доказываемое обобщение для уравнений, содержащих оператор Бесселя, применяя которую можно быстро и просто получить фундаментальное решение (одномерного) оператора Бесселя и, следовательно, фундаментальные решения стационарных уравнений в  $R^n$ . Общие вопросы сингулярных уравнений математической физики, использующие теорему о фундаментальном решении обыкновенного сингулярного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, рассматривались в работах [2], [3].

Степени (целые) этого оператора  $D_{B_{n-1}}$  задаются формулой

$$D_{B_\gamma}^\alpha = \begin{cases} B_\gamma^{\alpha/2}, & \alpha = 2k, \\ \frac{d}{dx} B_\gamma^{(\alpha-1)/2}, & \alpha = 2k + 1, \end{cases} \quad B_\gamma = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x} \frac{d}{dx} \quad (2)$$

где  $\gamma = n - 1$ , а  $k \in \mathbb{Z}^+$ .

### Скалярное произведение и $\delta$ -функция Дирака радиальных функций

Предварительно сделаем два замечания.

1. Легко установить, что обычное скалярное произведение для радиальных функций в  $R^n$  принимает вид

$$(f, q) = \int_{R^n} f(|x|)q(|x|)dx = |S_1(n)| \int_0^\infty f(r)q(r)r^{n-1}dr$$

$$|S_1(n)| = \int_{|x|=1} dS$$

и, как видим, может рассматриваться как скалярное произведение функций одного переменного, но в виде весовой линейной формы

$$(f, q)_\gamma = \int_0^\infty f(t)q(t)t^\gamma dt, \quad \gamma = n - 1 \quad (3)$$

2. Обычно действие  $\delta$ -функции Дирака на любую функцию, непрерывную в окрестности начала координат, определяется как функционал

$$(f, \delta) = f(0).$$

При этом, если считать  $\delta$ -функцию Дирака пределом соответствующей  $\delta$ -образной последовательности радиальных функций в  $R^n$ , то в сферических координатах это действие примет вид

$$f(0) = (f, \delta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{R_n} f(|x|)\delta_\varepsilon(|x|)dx = |S_1(n)| \int_0^\infty f(r)\delta^*(r)r^{n-1}dr$$

Как видим, в выражении справа уже нельзя принять  $\delta^*$  за дельта-функцию  $\delta$  действующую в классическом смысле  $(f, \delta) = f(0)$ , поскольку в этом случае мы бы получили справа 0, а не  $f(0)$ , как написано слева.

Исходя из этих двух замечаний, мы можем ввести следующее определение дельта-функции для весовых классов

$$\delta_\gamma : (f, \delta_\gamma)_\gamma = \int_0 f(x) \delta_\gamma(x) x^\gamma dx = f(0) \quad (4)$$

Что приводит к следующему действию функционала Дирака в классах радиальных функций:

$$(f, \delta) = |S_1(n)| \int_0 f(r) \frac{1}{|S_1(n)|} \delta_{n-1}(r) r^{n-1} dr = f(0),$$

т.е. за  $\delta^*$  мы должны взять  $\frac{1}{|S_1(n)|} \delta_{n-1}$ , где  $\delta_{n-1}$  функционал Дирака-Киприянова, отвечающий целому индексу  $\gamma = n - 1$ .

### **Фундаментальное решение обыкновенного сингулярного дифференциального уравнения второго порядка**

Дифференцирование, осуществляемое оператором Бесселя может быть задано в виде производной

$$Bf = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{T^h f(t) - f(t)}{h^2}, \quad t > 0$$

при подходящем выборе оператора сдвига  $T^h$ . Поэтому часто выражение  $B_\gamma f$  называют  $B$ -производной функции  $f$ , чем мы и воспользовались в заголовке этого пункта. Это удобно и в определении оператора  $L$ , поскольку производная первого порядка в уравнении появляется дважды, что дает повод привести подобные члены. Но именно этого делать нельзя в рассматриваемой здесь теории.

Ограничимся лишь уравнением второго порядка. Вариант доказываемой здесь теоремы приведен в [2], а общий и точный в [4].

Рассмотрим сингулярный дифференциальный оператор второго порядка

$$Lu(t) = B_\gamma u(t) + a_1 \frac{d}{dt} u(t) + a_2 u(t), \quad t > 0,$$

где  $B_\gamma = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\gamma}{t} \frac{d}{dt}$  -  $B$ -производная. Интегрированием по частям находим

$$(Lu, \varphi)_\gamma = (u, L^* \varphi),$$

где

$$L^* = B_\gamma - \frac{a_1}{t^\gamma} \frac{d}{dt} t^\gamma + a_2 \quad (5)$$

- оператор сопряженный к  $L(D_{B_\gamma})$  относительно весового скалярного произведения (3).

Фундаментальное решение оператора  $L(D_{B_\gamma})$  определяется как распределение  $E \in S_{ev}$  удовлетворяющее равенству

$$LE(t) = \delta_\gamma(t)$$

или, что тоже самое

$$(E, L^* \varphi)_\gamma = \varphi(0), \quad \forall \varphi \in S_{ev}[0, +\infty) \quad (6)$$

где  $S_{ev}([0, +\infty))$  подпространство пространства Шварца основных функций, состоящее из четных функций одного переменного.

**Теорема.** Пусть  $Z(x)$  - четная функция, имеющая особенность в точке  $t = 0$  такую, что

$$\lim_{t \rightarrow 0} x^\gamma Z(x) = 0 \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\gamma \frac{d}{dt} Z(t) = 1 \quad (8)$$

и пусть  $\lim_{t \rightarrow 0} t^\gamma B_\gamma Z(x) < \infty$ .

Если в области  $\{x > 0\}$  функция  $Z = Z(x)$  удовлетворяет однородному сингулярному дифференциальному уравнению второго порядка

$$L(D_{B_\gamma})Z(x) = 0 \quad (9)$$

то в смысле весовых обобщенных функций  $S_{ev}$  функция  $Z$  - фундаментальное решение оператора  $L$ .

Доказательство. Будем доказывать равенство (6). Оператор Бесселя в выражении

$$B_\gamma = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\gamma}{t} \frac{d}{dt} \text{ удобно записать в виде}$$

$$B_\gamma = \frac{1}{t^\gamma} \frac{d}{dt} t^\gamma \frac{d}{dt}$$

(это, т.н., дивергентная форма оператора Бесселя). пусть  $\varphi \in S_{ev}([0, \infty))$ . Рассмотрим первое слагаемое в выражении сопряжённого оператора (5). Интегрированием по частям, получим

$$\begin{aligned} (Z, B_\gamma \varphi)_\gamma &= \lim_{t \rightarrow +0} t^\gamma \varphi(t) Z(t) - \int_0^\infty Z(t) t^\gamma \frac{d\varphi(t)}{dt} dt = \\ &= - \int_0^\infty Z(t) t^\gamma \frac{d\varphi(t)}{dt} dt \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались условием (7). Снова интегрируя по частям и принимая во внимание условие (8), получим

$$\begin{aligned} (Z, B_\gamma \varphi)_\gamma &= \lim_{t \rightarrow +0} t^\gamma \varphi(t) Z(t) + \int_0^\infty (B_\gamma Z)(t) \varphi(t) t^\gamma dt = \\ &= \varphi(0) + \int_0^\infty (B_\gamma Z)(t) \varphi(t) t^\gamma dt \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое в выражении сопряжённого оператора (5). Точно также получим равенство

$$\int_0^\infty Z(t) \frac{d}{dt} (t^\gamma \varphi(t)) dt = \int_0^\infty Z(t) \varphi(t) t^\gamma dt$$

Таким образом,

$$(Z, L^*(D_{B_\gamma}) \varphi)_\gamma = \varphi(0) + \int_0^\infty (L(D_{B_\gamma}) Z)(t) \varphi(t) t^\gamma dt .$$

Остается воспользоваться тем, что  $Z(t)$  является решением однородного уравнения (9) и мы получим (6).

Доказательство закончено.

**Замечание.** Интересно сравнить эту теорему с теоремой о фундаментальном решении обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами,

которая применительно ко второму порядку уравнения гласит: если функция  $Z(t)$  является решением однородного уравнения

$$LZ(t) = 0$$

и удовлетворяет условиям:

$$Z(0) = 0, \quad Z'(0) = 1, \quad (10)$$

то функция

$$z(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Z(t), & t \geq 0 \end{cases}$$

- фундаментальное решение оператора  $L$ .

Как видим, роль начальных условий (10) в доказанной нами теореме играют весовые начальные условия, а поскольку одно из них не нулевое, то решение обязано иметь особенность в начале координат, порядок которой определен условиями (7) и (8). Другая особенность, отличающая данную теорему от известной теоремы о виде фундаментального решения обыкновенного дифференциального уравнения, заключается в четности решения, что заменило продолжение нулём функции на отрицательную полуось в классической теореме.

### Список литературы

1. Владимир В.С. Уравнения математической физики. М.: “Наука”, 1988.
2. Райхельгауз Л.Б. Полное преобразование Фурье-Бесселя и сингулярные дифференциальные операторы с  $D_B$  – оператором Бесселя. Диссерт.,..., канд. физ. мат. наук. Воронеж, ВГУ. 2011. С. 110.
3. Lyakhov L.N., Raykhelgauz L.B. Even and odd Fourier-Bessel transformations and some singular differential equations. // Cambridge Scientific Publishers. 2012. / Analytic Methods of Analysis and Differential Equations. AMADE-2009. С. 107-112.
4. Ляхов Л.Н. Фундаментальные решения дифференциальных уравнений с  $D_B$ -оператором Бесселя, Тр. МИАН, 2012, том 278, 148–160