Богдан Анна Михайловна

Ферганский Государственный Университет,факультета математики-информатики,

направление математики,студентка третьего курса

E-mail: annabogdan2305539@gmail.com

ОБОБЩЕННАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЕ К ПОСТРОЕНИЮ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация: В данной статье рассматривается обобщенная функция и ее применение к построению фундаментального решения обыкновенного сингулярного дифференциального уравнения. Обобщенные функции являются математическим инструментом, позволяющим обобщить понятие функции и работать с объектами, которые не являются обычными функциями. В контексте решения сингулярных дифференциальных уравнений, обобщенные функции позволяют учесть особенности поведения решений в точках, где обычные функции не определены или не дифференцируемы. Статья описывает методы и подходы к построению фундаментального решения сингулярного дифференциального уравнения с использованием обобщенных функций. Рассматриваются различные типы сингулярностей, такие как скачки, разрывы, источники и стоки, и предлагаются способы учета этих особенностей при построении решения.

Ключевые слова: обобщенные функции, функцией Хевисайда, фундаментальное решение, линейный дифференциальный оператор, сингулярные уравнения математической физики, функция Дирака.

Обобщенные функции - математическое понятие, обобщающее классическое понятие функции. Обобщенные функции были введены впервые в конце 20-х гг. XX в. П. Дираком в его исследованиях по квантовой механике, где он систематически использует понятие дельта-функции и ее производных. Основы математической теории обобщенных функций были заложены С.Л. Соболевым в 1936 году при решении задачи Коши для гиперболических уравнений, а в послевоенные годы французский математик Л. Шварц дал систематическое изложение теории обобщенных функций. Важную роль в формировании теории обобщенных функций сыграли работы Ж. Адамара, в которых в связи с изучением фундаментальных решений волновых уравнений рассмотрены сходящиеся интегралы, а также работы М. Рисса.

В дальнейшем теорию обобщенных функций интенсивно развивали многие математики, главным образом из-за потребностей математической физики. Теория обобщенных функций имеет многочисленные применения и все шире входит в обиход физика, математика и инженера.

Обобщенная функция понимается как непрерывный функционал над некоторым классом основных функций. В зависимости от рассматриваемых задач используются самые разнообразные классы основных функций, учитывающие специфику задачи.

Рассмотрим обобщенные функции на Ω, где Ω - отрезок $[a,b]$. Основные функции на Ω берутся бесконечно дифференцируемыми внутри Ω с предписанным поведением на концах Ω

ISSN: 2181-4341, IMPACT FACTOR (RESEARCH BIB) – 7,245, SJIF – 5,431

. Значение обобщенной функции f как функционала над основной функцией φ будет обозначаться в виде (f,φ). Обобщенная функция называется регулярной, если существует такая локально суммируемая функция $f(x)$, что $\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx$ существует для всех основных функций $\varphi(x)$ и

$$(f,\varphi)=\int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx \qquad (1)$$

(предполагается, что в качестве (f,φ) выбрана билинейная форма, совпадающая с (1) в случае регулярной обобщенной функции).

Функцией Хевисайда называют обобщенную функцию $\theta(x)$ действующую по формуле

$$(\theta(x),\varphi(x))=\int_{0}^{+\infty}\varphi(x)dx.$$

Это регулярная обобщенная функция, и ее действие на основные функции задается по формуле (1) с помощью локально интегрируемой в R функции

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Эту функцию еще называют функцией единичного скачка.

Класс $X=X(\Omega)$ основных функций предполагается наделенным топологией (сходимостью). Через $X'=X'(\Omega)$ обозначаем топологический сопряженное к X пространство обобщенных функций.

Понятие обобщенной функции, сосредоточенной в точке. Известная δ - функция Дирака $\delta(x-x_0),\ x_0\in\Omega$, и ее производные, действующие по правилу

$$(\delta^{(k)}(x-x_0),\varphi)=(-1)^k\varphi^{(k)}(x_0),$$

представляют собой примеры обобщенных функций, сосредоточенных в точке. Справедливо и обратное утверждение: всякий функционал f, сосредоточенный в точке x_0, имеет вид

$$f=\sum_{k=0}^{N}c_k\delta^{(k)}(x-x_0).$$

Понятие фундаментального решения дифференциальных уравнений

ISSN: 2181-4341, IMPACT FACTOR (RESEARCH BIB) – 7,245, SJIF – 5,431

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор порядка m

$$L(D)=\sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha D^\alpha$$

здесь $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)$ - мультииндекс, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_m$ -длина мультииндекса, $D^\alpha=\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\ldots\partial x_m^{\alpha_m}}$.

Определение. Фундаментальным решением (функцией влияния, элементарным решением) оператора $L(D)$ называется обобщенная функция $E(x)$ удовлетворяющая равенству $L(D)E(x)=\delta(x)$.

Хорошо известно, что фундаментальным решением оператора Лапласа является радиальная функция [1], которую удобно трактовать как функцию одного переменного. Поэтому естественно попытаться свести поиск такого решения к поиску фундаментального решения обыкновенного дифференциального уравнения. Но здесь возникают сложности, связанные с тем, что сферическое преобразование координат $x=r\Theta,\quad |\Theta|=1$ в R^n сводит уравнение

$$\Delta u(x)=\delta(|x|),\qquad \Delta=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

к уравнению с оператором Бесселя

$$B_{n-1}u(r)=\delta_{n-1}(r),\qquad B_{n-1}=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{n-1}{r}\,\frac{d}{dr},$$

для которого в классических курсах математической физики не приводятся формулы фундаментальных решений. В то же время широко используется теорема о фундаментальном решении обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, позволяющая вместе с преобразованием Фурье легко находить фундаментальное решение классических нестационарных уравнений. Последняя теорема имеет простое и, главное, просто доказываемое обобщение для уравнений, содержащих оператор Бесселя, применяя которую можно быстро и просто получить фундаментальное решение (одномерного) оператора Бесселя и, следовательно, фундаментальные решения стационарных уравнений в R^n. Общие вопросы сингулярных уравнений математической физики, использующие теорему о фундаментальном решении обыкновенного сингулярного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, рассматривались в работах [2], [3].

Степени (целые) этого оператора $D_{B_{n-1}}$ задаются формулой

$$D^{\alpha}_{B_\gamma} = \begin{cases} B_\gamma^{\alpha/2}, & \alpha = 2k, \\ \dfrac{d}{dx} B_\gamma^{(\alpha-1)/2}, & \alpha = 2k+1 \end{cases}, \qquad B_\gamma = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\gamma}{x}\frac{d}{dx} \tag{2}$$

где $\gamma = n-1,$ а $k \in Z^+$.

Скалярное произведение и δ-функция Дирака радиальных функций

Предварительно сделаем два замечания.

1. Легко установить, что обычное скалярное произведение для радиальных функций в R^n принимает вид

$$(f,q) = \int_{R^n} f(|x|)q(|x|)dx = |S_1(n)| \int_0^\infty f(r)q(r)r^{n-1}dr$$

$$|S_1(n)| = \int_{|x|=1} dS$$

и, как видим, может рассматриваться как скалярное произведение функций одного переменного, но в виде весовой линейной формы

$$(f,q)_\gamma = \int_0^\infty f(t)q(t)t^\gamma dt, \qquad \gamma = n-1 \tag{3}$$

2. Обычно действие δ-функции Дирака на любую функцию, непрерывную в окрестности начала координат, определяется как функционал

$$(f,\delta) = f(0).$$

При этом, если считать δ - функцию Дирака пределом соответствующей δ-образной последовательности радиальных функций в R^n, то в сферических координатах это действие примет вид

$$f(0) = (f,\delta) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{R_n} f(|x|)\delta_\varepsilon(|x|)dx = |S_1(n)| \int_0^\infty f(r)\delta^*(r)r^{n-1}dr$$

Как видим, в выражении справа уже нельзя принять δ^* за дельта-функцию δ действующую в классическом смысле $(f,\delta)=f(0)$, поскольку в этом случае мы бы получили справа 0, а не $f(0)$, как написано слева.

Исходя из этих двух замечаний, мы можем ввести следующее определение дельта-функции для весовых классов

$$\delta_\gamma : (f,\delta_\gamma)_\gamma = \int_0^\infty f(x)\delta_\gamma(x)x^\gamma dx = f(0) \qquad (4)$$

Что приводит к следующему действию функционала Дирака в классах радиальных функций:

$$(f,\delta) = |S_1(n)| \int_0^\infty f(r)\frac{1}{|S_1(n)|}\delta_{n-1}(r)r^{n-1}dr = f(0),$$

т.е. за δ^* мы должны взять $\frac{1}{|S_1(n)|}\delta_{n-1}$, где δ_{n-1} функционал Дирака-Киприянова, отвечающий целому индексу $\gamma = n-1$.

Фундаментальное решение обыкновенного сингулярного дифференциального уравнения второго порядка

Дифференцирование, осуществляемое оператором Бесселя может быть задано в виде производной

$$Bf = \lim_{h\to 0}\frac{T^h f(t) - f(t)}{h^2}, \qquad t>0$$

при подходящем выборе оператора сдвига T^h. Поэтому часто выражение $B_\gamma f$ называют B-производной функции f, чем мы и воспользовались в заголовке этого пункта. Это удобно и в определении оператора L, поскольку производная первого порядка в уравнении появляется дважды, что дает повод привести подобные члены. Но именно этого делать нельзя в рассматриваемой здесь теории.

Ограничимся лишь уравнением второго порядка. Вариант доказываемой здесь теоремы приведен в [2], а общий и точный в [4].

Рассмотрим сингулярный дифференциальный оператор второго порядка

$$Lu(t) = B_\gamma u(t) + a_1\frac{d}{dt}u(t) + a_2 u(t), \qquad t>0,$$

где $B_\gamma = \dfrac{d^2}{dt^2} + \dfrac{\gamma}{t}\dfrac{d}{dt}$ - B -производная. Интегрированием по частям находим

$$(Lu,\varphi)_\gamma = (u, L^*\varphi),$$

где

$$L^* = B_\gamma - \frac{a_1}{t^\gamma}\frac{d}{dt}t^\gamma + a_2 \tag{5}$$

- оператор сопряжённый к $L(D_{B_\gamma})$ относительно весового скалярного произведения (3).

Фундаментальное решение оператора $L(D_{B_\gamma})$ определяется как распределение $E \in S'_{ev}$ удовлетворяющее равенству

$$LE(t) = \delta_\gamma(t)$$

или, что тоже самое

$$(E, L^*\varphi)_\gamma = \varphi(0), \qquad \forall \varphi \in S_{ev}[0,+\infty) \tag{6}$$

где $S_{ev}([0,\infty))$ подпространство пространства Шварца основных функций, состоящее из четных функций одного переменного.

Теорема. Пусть $Z(x)$ - четная функция, имеющая особенность в точке $t=0$ такую, что

$$\lim_{t\to 0} x^\gamma Z(x) = 0 \tag{7}$$

$$\lim_{x\to 0} x^\gamma \frac{d}{dt} Z(t) = 1 \tag{8}$$

и пусть $\lim\limits_{t\to\infty} t^\gamma B_\gamma Z(x) < \infty$.

Если в области $\{x > 0\}$ функция $Z = Z(x)$ удовлетворяет однородному сингулярному дифференциальному уравнению второго порядка

$$L(D_{B_\gamma})Z(x) = 0 \tag{9}$$

то в смысле весовых обобщенных функций S_{ev} функция Z - фундаментальное решение оператора L.

Доказательство. Будем доказывать равенство (6). Оператор Бесселя в выражении $B_\gamma = \frac{d^2}{dt^2} + \frac{\gamma}{t}\frac{d}{dt}$ удобно записать в виде

$$B_\gamma = \frac{1}{t^\gamma}\frac{d}{dt}t^\gamma\frac{d}{dt}$$

(это, т.н., дивергентная форма оператора Бесселя). пусть $\varphi \in S_{ev}([0,\infty))$. Рассмотрим первое слагаемое в выражении сопряжённого оператора (5). Интегрированием по частям, получим

$$(Z, B_\gamma\varphi)_\gamma = \lim_{t\to+0} t^\gamma \varphi'(t)Z(t) - \int_0^\infty Z'(t)t^\gamma \frac{d\varphi(t)}{dt}dt =$$

$$= -\int_0^\infty Z'(t)t^\gamma \frac{d\varphi(t)}{dt}dt$$

Здесь мы воспользовались условием (7). Снова интегрируя по частям и принимая во внимание условие (8), получим

$$(Z, B_\gamma\varphi)_\gamma = \lim_{t\to+0} t^\gamma \varphi'(t)Z(t) + \int_0^\infty (B_\gamma Z)(t)\varphi(t)t^\gamma dt =$$

$$= \varphi(0) + \int_0^\infty (B_\gamma Z)(t)\varphi(t)t^\gamma dt$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое в выражении сопряжённого оператора (5). Точно также получим равенство

$$\left(Z, -\frac{a_1}{t^\gamma}\frac{d}{dt}(t^\gamma\varphi(t))\right)_\gamma = \int_0^\infty Z'(t)\varphi(t)t^\gamma dt$$

Таким образом,

$$(Z, L^*(D_{B_\gamma})\varphi)_\gamma = \varphi(0) + \int_0^\infty (L(D_{B_\gamma})Z)(t)\varphi(t)t^\gamma dt$$
.

Остается воспользоваться тем, что $Z(t)$ является решением однородного уравнения (9) и мы получим (6).

Доказательство закончено.

Замечание. Интересно сравнить эту теорему с теоремой о фундаментальном решении обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, которая применительно ко второму порядку уравнения гласит: если функция $Z(t)$ является решением однородного уравнения

$$LZ(t)=0$$

и удовлетворяет условиям:

$$Z(0)=0,\quad Z'(0)=1, \tag{10}$$

то функция

$$z(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ Z(t), & t\geq 0\end{cases}$$

- фундаментальное решение оператора L.

Как видим, роль начальных условий (10) в доказанной нами теореме играют весовые начальные условия, а поскольку одно из них не нулевое, то решение обязано иметь особенность в начале координат, порядок которой определен условиями (7) и (8). Другая особенность, отличающая данную теорему от известной теоремы о виде фундаментального решения обыкновенного дифференциального уравнения, заключается в четности решения, что заменило продолжение нулём функции на отрицательную полуось в классической теореме.

Список литературы

1. Владмиров В.С. Уравнения математической физики. М.: “Наука”, 1988.
2. Райхельгауз Л.Б. Полное преобразование Фурье-Бесселя и сингулярные дифференциальные операторы с D_B – оператором Бесселя. Диссерт.,..., канд.физ.мат.наук. Воронеж, ВГУ. 2011. С. 110.
3. Lyakhov L.N., Raykhelgauz L.B. Even and odd Fourier-Bessel transformations and some singular differential equations. // Cambridge Scientific Publishers. 2012. / Analytic Methods of Analysis and Differential Equations. AMADE-2009. C. 107-112.
4. Ляхов Л.Н. Фундаментальные решения дифференциальных уравнений с D_B-оператором Бесселя, Тр. МИАН, 2012, том 278, 148–160